Spectral and Evolution Problems
Vol. 15

Спектральные и эволюционные задачи
Том. 15

Simferopol, Ukraine

Taurida National V.Vernadsky University
Black Sea Branch of Moscow State University
Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimean Academy of Sciences
Crimean Mathematical Foundation

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn
Mathematical School-Symposium
(KROMSH-2004)

September 18 – 29, 2004, Sevastopol, Laspi

Volume 15

Simferopol, 2005

UDC 517.432+517.515+515.958

Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Fourteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 15. /Group of authors. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2005. — ??? pp. — in English and Russian.

This collection contains accounts of lectures and papers of the participants of the Fourteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, which was held by the Crimean Mathematical Foundation. The materials of the Symposium are devoted to the actual mathematical investigations in the field of spectral and evolutionary problems, and to the close questions.

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of mathematical and physical specialities.

Предисловие

Пятнадцатая Крымская Осенняя Математическая школа-Симпозиум КРОМШ-2004 проходила с 18 по 29 сентября 2004г. в поселке Ласпи, в одном из лучших мест Южного Берега Крыма – заливе Батилиман, на территории базы отдыха "Чайка".

Как и в предыдущие годы, Оргкомитет КРОМШ возглавлял заведующий кафедрой математического анализа Таврического Национального Университета им. В.И.Вернадского, профессор Н.Д.Копачевский. Организация и проведение Школы проходили при участии членов локального Оргкомитета, сотрудников кафедры Б.Д.Марянина, М.А.Муратова, И.В.Орлова, Ю.С.Пашковой, С.И.Смирновой, П.А.Старкова.

В работе Симпозиума приняли участие более 200 математиков из Украины, России, Белоруси, Армении, Узбекистана, Польши, Германии, Англии, Франции, Италии, Израиля, Австралии, Японии и США. Среди них было много известных математиков, много и молодых ученых, аспирантов, студентов. Среди них — около 80 докторов наук. КРОМШ-2004 была посвящена 250-летию Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. На Школе работали следующие секции и подсекции:

Секция 1. Спектральные задачи.

Подсекция 1.1. Несамосопряжённые операторы. Руководители: Антоневич А. Б. (Минск), Самойленко Ю. С. (Киев), Шульман В. С. (Вологда).

Подсекция 1.2. Спектральная теория операторных пучков и индефинитная метрика. Руководители: Шкаликов А. А. (Москва), Копачевский Н. Д. (Симферополь), Хромов А. П. (Саратов).

Секция 2. Эволюционные и краевые задачи.

Подсекция 2.1. Дифференциально-операторные уравнения. Руководители: Горбачук М. Л. (Киев), Баскаков А. Г., Чернышов К. И. (Воронеж).

Подсекция 2.2. Краевые задачи. Руководители: Агранович М. С. (Москва), Скубачевский А. Л. (Москва), Солонников В. А. (Санкт-Петербург).

Секция 3. Теория игр и экономическое поведение. Руководители: Жуковский В. И. (Москва), Чикрий А. А. (Киев), Курина Г. А. (Воронеж).

Секция 4. Информатика и дискретная математика. Руководители: Сапоженко А. А., Гуров С. И. (Москва), Донской В. И. (Симферополь)

По приглашению Программного Комитета на КРОМШ-2004 были прочитаны 50 пятидесятиминутных лекций:

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для операторов типа потенциала на незамкнутых поверхностях. — Россия.
2. *Ананьевский И. М.* Poincare Rotation Number and Invariant Sets on a Plane. — Россия.
3. *Аптекарев А. И.* Интегрируемые регуляризации гиперболических систем и вариационные системы. — Россия.
4. *Афендиков А. Л.* Динамические свойства пространственно неубывающих нестационарных решений 2D уравнений Навье-Стокса. — Германия-Россия.
5. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы, полугруппы операторов, разностные операторы. — Россия.
6. *Бекларян Л. А.* Группа преобразований, аменабельность, метрические и топологические характеристики. — Россия.
7. *Боярский Б.* Riemann-Hilbert problem, Fredholm pairs, biGrassmanian and Cobordism. — Польша.
8. *Власов В. В.* Об оценках решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. — Россия

9. *Власов В. И.* Пространства Харди, вопросы аппроксимации и краевые задачи. — Россия.

10. *Волевич Л. Р.* Многоугольник Ньютона в задачах со свободной границей. — Россия.

11. *Глушак А. В.* Абстрактные дифференциальные уравнения с дробными производными. — Россия.

12. *Горбачук М. Л.*1) Научный вклад Остроградского и Буняковского в развитие математики. 2)–3) Пространства гладких и обобщенных векторов замкнутого оператора и их применение. — Украина.

13. *Жуковский В. И.* Риск в задачах при неопределенности. — Россия.

14. *Зеликин М. И.* Гессиан функции Беллмана и решения уравнения Риккати. — Россия.

15. *Hisao Yashima Fujita, Розанова О.С.* Стационарное решение системы уравнений движения воздуха в нижней части тайфуна. — Италия, Россия.

16. *Kosiek M.* Invariant subspaces and reflexivity of multioperators. — Польша.

17. *Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор. — Россия.

18. *Лебедев А. В., Антоневич А. Б.* Что такое скрещенное произведение? — Беларусь.

1) Когда эндоморфизм алгебры порожден частичной изометрией?

2) Скрещенное произведение алгебры и эндоморфизма

19. *Лобанов А. И., Петров И. Б.* Математическое моделирование быстропротекающих биологических процессов и его медицинские приложения. — Россия.

20. *Меликян А. А.* Сингулярные характеристики в граничных условиях уравнения Гамильтона-Якоби. — Россия.

21. *Мышкис А. Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. — Россия

22. *Новокшенов В. Ю.* Modulation instabilities of wave interactions. — Россия.

23. *Овсеевич А. И.* Экзотические сферы Милнора. — Россия.

24. *Попович С. В., Самойленко Ю. С.* Спектральная проблема и представление алгебр. — Украина.

25. *Печенцов А. С., Козко А. И.* Следы сингулярных дифференциальных операторов. — Россия.

26. *Ptak M.* Reflexivity and hyperreflexivity of subspaces of operators. — Польша.

27. *Прилепко А. И.* Inverse Problems for Evolution Equations of Mathematical Physics. — Россия.

28. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов. — Россия.

29. *Рябенький В. С.* Понятие потенциала с плотностью из пространства четких следов. — Россия.

30. *Самборский С. Н.* Взгляд на некоторые вопросы функционального анализа через решетку. — Россия-Франция.

31. *Сапоженко А. А.* Гипотеза Камерона-Эрдеша. — Россия.

32. *Седлецкий А. М.* Muntz-Scasz type approximation in direct products of spaces. — Россия.

33. *Сильченко Ю. Т.* Некоторые задачи для дифференциальных уравнений с интегральными условиями. — Россия.

34. *Скороходов С. Л.* Квазиавтомодельность собственных значений сфероидальных функций. — Россия.

35. *Скубачевский А. Л.* О компактных и некомпактных возмущениях нелокальных эллиптических задач. — Россия.

36. *Солонников В. А.* О неустойчивости фигур равновесия вращающейся вязкой капиллярной несжимаемой жидкости. — Россия.

37. *Сонис М.* Математические аспекты социальных структур. — Израиль.

38. *Стебловская В. Р.* О некоторых дискретных моделях финансового рынка. — США-Украина.

39. *Сукочев Ф.* Double Operator Integrals and Differentiability of Operator Valued Functions. — Австралия.

40. *Тодоров И.* Geometric aspects of compactness in operator algebras. — Англия.

41. *Хапаев М. М.* Применение сингулярных многообразий в задачах управления с фазовыми ограничениями. — Россия.

42. *Хацкевич В.* Операторные пучки 2-го порядка и дробно-линейные операторные отношения. — Израиль.

43. *Хромов А. П.* Дифференциально-разностный оператор с интегральными граничными условиями. — Россия.

44. *Чернышов К. И.* Полугруппа распределений с сингулярностью в нуле. — Россия.

45. *Чуешов И. Д.* Глобальный аттрактор для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией. — Украина.

46. *Шкаликов А. А.* Спектральные портреты несамосопряженных задач в квазиклассическом приближении. — Россия.

47. *Шульман В. С.* Операторный синтез и его приложение к дифференциальным уравнениям. — Россия.

Аннотации лекций, прочитанных на КРОМШ-2004

Число вращения Пуанкаре и инвариантные множества на плоскости

Ананьевский И. М. (Москва, Россия)

Число вращения как характеристика поведения динамической системы на торе появилось в трудах Пуанкаре в конце XIX в. Для произвольного сохраняющего ориентацию гомеоморфизма T единичной окружности в себя оно определяется как $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} T^n x/x$ (в знаменателе стоит координата точки на окружности, а в числителе — координата точки $T^n x$ на накрывающей прямой). Данный предел существует и не зависит от x. В частности, для динамической системы на торе в качестве T может выступать преобразование Пуанкаре нулевого меридиана.

Теорема 1. Число вращения μ рационально тогда и только тогда, когда у гомеоморфизма T существует периодическая точка. При этом все периодические точки имеют минимальный период, равный знаменателю μ.

Д. Биркгоф распространил понятие числа вращения на отображения более сложных множеств следующим образом. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, G — ограниченная односвязная область, $TG = G$, $\Gamma = \partial G$ — граница G. Пусть C — конформное отображение области G на единичный круг D. Оказывается, что отображение $T' = CTC^{-1} : D \to D$ продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{D}$. Число вращения μ полученного гомеоморфизма T' единичной окружности $S = \partial D$ и называется числом вращения отображения T на Γ.

Ниже используется следующая терминология: связный компакт называется континуумом; континуум Γ называется биркгофовой кривой, если он делит плоскость на две области и является их общей границей. Известно, что при конформном отображении $C : G \to D$ каждой точке окружности $S = \partial D$ соответствует т.н. граничный элемент границы $\Gamma = \partial G$. Континуум, изображающий какой-либо граничный элемент, будем называть элементарным.

Теорема 2. Пусть Γ — биркгофова кривая, $x \in \Gamma$, $T^n x = x$, множество Γ не является конечным объединением элементарных континуумов, имеющих общую точку x. Тогда μ рационально и его знаменатель является делителем n.

Теорема 3. Если граница $\Gamma = \partial G$ представима в виде конечного объединения элементарных континуумов, то Γ содержит т.н. неразложимый континуум.

Нетрудно видеть, что для биркгофовой кривой может быть определено два числа вращения — "снаружи" и "изнутри".

Теорема 4. Если биркгофова кривая Γ не является конечным объединением элементарных континуумов ни снаружи, ни изнутри, то внешнее и внутренние числа вращения совпадают.

Сформулированы и другие утверждения о свойствах числа вращения.

Скрещенное произведение C^*–алгебры и эндоморфизма

Антоневич А. Б., Бахтин В. И., Лебедев А.В. (Минск, Беларусь)

При исследовании операторных алгебр в 30-х годах 20-го века Дж.Фон Нейманом была введена конструкция скрещенного произведения C^*–алгебры A и *автоморфизма* $\delta : A \to A$, состоящая в построении новой C^*–алгебры $C^*(\pi(A), U)$, порожденной точным представлением $\pi(A) \subset L(H)$ и унитарным оператором $U \in L(H)$, обладающим свойством

$$U\pi(a)U^* = \pi(\delta(a)), \;\; a \in A.$$

Эта конструкция (названная впоследствии *регулярным представлением*) позволяет строить существенно более сложные алгебры на основе заданных и имеет многочисленные приложения в задачах математической физики.

В 60-х годах 20-го века в работах М. Зеллера–Мейера, О. Браттели, Д.У.Робинсона, Ж. Томиямы и др. была предложена другая (эквивалентная) конструкция на основе понятия обертывающейся алгебры, и к 80-м годам в основных чертах завершенная теория C^*–алгебр и их групп автоморфизмов была построена.

Начиная с конца 20-го века основное внимание исследователей в этом направлении переключилось на поиски подхода к общему определению скрещенного произведения C^*–алгебры и эндоморфизма. Принципиальные продвижения здесь достигнуты в работах Р. Дж. Стасей, Г.Дж. Мэрфи, Дж. Кунца, У. Критера, У.Л.Пашке, Р.Экселя и других. Однако, ввиду необходимости качественно различных типов эндоморфизмов, до настоящего времени законченной теории в этом направлении не построено.

В докладе впервые получена конструкция регулярного представления для скрещенного произведения C^*–алгебры и произвольного эндоморфизма.

Теорема 1. Пусть A есть C^*–алгебра с единицей $\mathbf{1}$ и $\delta : A \to A$ эндоморфизм. Для того, чтобы существовало точное представление $\pi : A \to L(H)$ в некотором гильбертовом пространстве H и оператор $U \in L(H)$, такой, что

i) $U\pi(A)U^* = \pi(\delta(a))$, $\forall\, a \in A$; ii) $U^*\pi(A)U \subset \pi(A)$, необходимо, чтобы существовал проектор P из центра алгебры A, такой, что $\delta(P) = \delta(\mathbf{1})$ и отображение $\delta : PA \to \delta(A)$ является изоморфизмом.

Теорема 2. Если существует проектор P с указанными в теореме 1 свойствами, то существует представление $\pi : A \to L(H)$ и оператор U, являющийся частичной изометрией, такой, что выполнены условия i) и ii), а также выполнено неравенство

$$\|U^{*m}a_{-m} + \ldots + U^*a_{-1} + a_0 + a_1U + \ldots + a_mU^m\| \geqslant \|a_0\|$$

для любой конечной суммы указанного вида, где $a_k \in A$.

C^*–алгебра $C^*(\pi(A), U)$, порожденная $\pi(A)$ и оператором U, не зависит от выбора представления π и оператора U, т.е. определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Описанную в теореме 2 C^*–алгебру будем называть скрещенным произведением алгебры A и эндоморфизма δ. Предложенное определение скрещенного произведения согласуется с известными ранее.

Доказательство заключается в явном построении регулярного представления, содержащем существенные модификации по сравнению с конструкцией фон Неймана.

Линейные дифференциальные операторы, полугруппы операторов и разностные операторы

Баскаков А. Г. (Воронеж, Россия)

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\mathfrak{X}$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства X, $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство измеримых (по Бохнеру) и суммируемых со степенью p нормы функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в X (ограниченных при $p = \infty$), $C_b(\mathbb{R}, X)$ — подпространство непрерывных функций из $L_\infty(\mathbb{R}, X)$ и $C_0(\mathbb{R}, X)$ — подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, убывающих из ∞. Символ $F(\mathbb{R}, X)$ обозначает одно из этих пространств, и символ $F(\mathbb{Z}, X)$ — соответствующее пространство двусторонних последовательностей векторов из X.

Изучается дифференциальный оператор $\mathcal{L}_u = -d/dt + A(t) : D(\mathcal{L}_u) \subset F(\mathbb{R}, X) \to F(\mathbb{R}, X)$ в предположении, что семейство замкнутых операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, действующих в X, порождает сильно непрерывное эволюционное семейство операторов $U(t, s)$, $-\infty < s \leqslant t < \infty$, из алгебры $\mathfrak{X}$. Его область определения $D(\mathcal{L}_u)$ строится, используя это семейство.

Теорема 1. Оператор $\mathcal{L}_u$ является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $(T_u(t)x)(s) = U(s, s-t)x(s-t)$, $s \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $x \in F(\mathbb{R}, X)$ и $F(\mathbb{R}, X)$ совпадает с одним из пространств $C_0(\mathbb{R}, X)$, $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2 (теорема об отображении спектра). Имеет место равенство $\sigma(T_u(t))\backslash\{0\} = \{\exp \lambda t,\ \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_u)\}$.

Теорема 3. Оператор $\mathcal{L}_u$ обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $(D_0x)(n) = x(n) - U(n, n-1)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in F(\mathbb{Z}, x)$.

Теорема 4. Оператор $\mathcal{L}_u$ обратим тогда и только тогда, когда семейство U допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ или на $\mathbb{Z}$.

Теорема 5. Спектр $\sigma(\mathcal{L}_u)$ оператора $\mathcal{L}_u$ не зависит от выбора пространства $F(\mathbb{R}, X)$.

Группы преобразований, аменабельность, топологические и метрические инварианты

Бекларян Л. А. (Москва, Россия)

Доклад посвящен проблеме Дэйя о классификации групп по шкале, задаваемой числом Тарского $\tau(G)$ глуппы G, и обсуждению вопроса о неаменабельности группы Ричарда–Томпсона, как примера конечно порожденной и конечно определенной группы без свободных подгрупп. Этот вопрос изучается в рамках классификации произвольных групп гомеоморфизмов прямой (окружности). Для группы G гомеоморфизмов прямой (окружности) определяются топологические инварианты (минимальные множества, множество неподвижных точек элементов группы G), а также метрические инварианты в виде ω–проективно–инвариантной меры, где ω — кардинальное число. Такие метрические инварианты являются обобщением понятия инвариантной меры (0–проективно–инвариантной меры), а также проективно–инвариантной меры (1–проективно–инвариантной меры). Показано, что условие непустоты минимального множества эквивалентно существованию ω–проективно–инвариантной меры. Для группы с ω–проективно–инвариантной мерой описаны "препятствия" для существования инвариантной меры, или 1–проективно–инвариантной меры. Такие "препятствия" могут быть описаны в терминах как топологических, так и комбинаторных характеристик. На этом пути получено неулучшаемое усиление теоремы Дэйя о существовании инвариантной меры. Обсуждается гипотеза о существовании проективно–инвариантной меры. При справедливости такой гипотезы легко устанавливается неаменабельность группы Ричарда–Томпсона.

Работа поддержана Грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ №00–15-96107 и грантом РФФИ № 03–01–00174

Об оценках решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа

Власов В. В. (Москва, Россия)

Установлены неулучшаемые оценки сильных решений систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа произвольного дифференциального порядка.

Наряду с этим рассмотрены некоторые спектральные вопросы, включающие в себя изучение полноты и базисности Рисса системы экспоненциальных решений упомянутых уравнений в шкале пространств Соболева.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для системы функционально-дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} A_{kj}u^{(j)}(t-h_k) = f(t),\ t>0, \tag{1}$$

$$u(t) = g(t),\ t\in[-h,0]. \tag{2}$$

Здесь A_{kj} — квадратные матрицы размера $(r\times r)$, числа h_j таковы, что $0=h_0<h_1<\ldots<h_n=h$, $f(t)\in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ для любого $T>0$, $g(t)\in W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$.

Обозначим через λ_q корни характеристического квазимногочлена уравнения (1).

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\det A_{0m}\neq 0$, $\det A_{k_0 m}\neq 0$, $0<k_0\leqslant n$. Тогда для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1),(2) выполнена оценка

$$\|u\|_{W_2^1[t-h,t]} \leqslant d_0(t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+ t}\|g\|_{W_2^1[-h,0]}+$$
$$+d_1\sqrt{t}\left(\int_0^t (t+1-s)^{2(M-1)}e^{2\varkappa_+(t-s)}\|f(s)\|^2\,ds\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где $\varkappa_+=\sup\operatorname{Re}\lambda_q$, постоянные d_0 и d_1 не зависят от функций g и f, при этом величина M определяется структурой корней характеристического квазиполинома уравнения (1). (подробнее см. [1]).

Литература

1. В. В. Власов, С. А. Иванов / Алгебра и Анализ. т.16 (2003).

Абстрактные дифференциальные уравнения с дробными производными

Глушак А. В. (Воронеж, Россия)

В банаховом пространстве X рассмотрим задачу типа Коши

$$D^\alpha(t^kD^\beta u) = t^\gamma Au,\quad t>0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u = u_0,\quad \lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}(t^kD^\beta u) = u_1, \tag{2}$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$, $D^{\alpha-1}$ и D^{α}, соответствено, дробный интеграл и дробная производная Римана–Лиувилля.

Устанавливаются следующие основные результаты.

Теорема 1. Пусть A — ограниченный оператор из X в X, $\alpha - k > 0$, $\beta + \gamma > 0$, $\gamma \leqslant k$. Тогда задача (1),(2) равномерно корректна.

Теорема 2. Пусть A — замкнутый плотно определенный оператор, $k = \gamma = 0$, $u_0, u_1 \in D(A)$. Для того, чтобы задача (1),(2) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ оператор A имел резольвенту $R(\lambda^{\alpha+\beta})$, удовлетворяющую неравенству

$$\Big\|\frac{d^n(\lambda^{\alpha}R(\lambda^{\alpha+\beta}))}{d\lambda^n}\Big\| \leqslant \frac{M\Gamma(n+\beta)}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{n+\beta}}. \tag{3}$$

Замечание. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $u_0 = 0$. Тогда вместо неравенства (3) следует потребовать выполнения менее жесткого условия вида

$$\Big\|\frac{d^n R(\lambda^{\alpha+\beta})}{d\lambda^n}\Big\| \leqslant \frac{M\Gamma(n+\alpha+\beta)}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{n+\alpha+\beta}}.$$

Гладкие векторы замкнутого оператора в банаховом пространстве и их применение

Горбачук М. Л. (Киев, Украина)

Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(A)$ в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{L}$. Пусть также $m = \{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая числовая последовательность, $m_0 = 1$. Обозначим через $C^{\infty}(A)$ множество бесконечно дифференцируемых векторов оператора A: $C^{\infty}(A) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D(A^n)$.

Для числа $\alpha > 0$ положим

$$C_m^{\alpha}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \,|\, \exists\, c > 0\, \forall\, n \in N_0 : \,\|A^n x\| \leqslant c\alpha^n m_n\}$$

($\|\cdot\|$ — норма в $\mathcal{L}$).

Множество $C_m^{\alpha}(A)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x\|_{C_m^{\alpha}(A)} = \sup_n \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n m_n}.$$

Определим векторные пространства $C_{\{m\}}(A)$ и $C_{(m)}(A)$ как

$$C_{\{m\}}(A) = \bigcup_{\alpha>0} C_m^{\alpha}(A), \quad C_{(m)}(A) = \bigcap_{\alpha>0} C_m^{\alpha}(A)$$

и снабдим их топологией индуктивного и, соответственно, проективного пределов банаховых пространств $C_m^{\alpha}(A)$:

$$C_{\{m\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha>0} C_m^{\alpha}(A), \quad C_{(m)}(A) = \underset{\alpha>0}{Projlim} C_m^{\alpha}(A).$$

В конкретных ситуациях, когда $m_n = n^n$ или $m_n \equiv 1$, приходим к известным пространствам аналитических ($C_{\{n!\}}(A) = C_{\{n^n\}}(A)$), целых ($C_{(n!)}(A) = C_{(n^n)}(A)$) и целых экспоненциального типа ($C_{\{1\}}(A)$) векторов оператора A.

Первая лекция посвящена нахождению условий плотности в $\mathcal{L}$ введенных пространств. Условия формулируются в терминах размещения спектра оператора A и поведения его резольвенты при приближении к спектру. Рассмотрены приложения к различным классам операторов, в частности, к случаям, когда: а) оператор A является генератором однопараметрической полугруппы или группы линейных операторов; б) оператор A имеет компактную резольвенту.

Вторая лекция посвящена операторному подходу к получению прямых и обратных теорем теории приближения функций, устанавливающих связь между степенью гладкости функции и степенью убывания ее наилучшего приближения элементарными, которыми служат алгебраические полиномы на конечном сегменте, тригонометрические полиномы в периодическом случае, целые функции экспоненциального типа на всей числовой оси и т.п. Этот подход состоит в том, что с каждой конкретной задачей теории приближения связывается замкнутый оператор A в подходящем банаховом пространстве $\mathcal{L}$, в норме которого делается оценка приближения. В роли элементарных агрегатов выступают целые векторы экспоненциального типа оператора A, т.е. векторы пространства $C_{\{1\}}(A)$. Наилучшее приближение произвольного вектора $x \in \mathcal{L}$ векторами из $C_{\{1\}}(A)$ определяется как

$$E_r(x) = \inf_{y \in C_{\{1\}}(A):\, \sigma(y) \leqslant r} \|x - y\|,$$

где $\sigma(y)$ — тип вектора y, т.е. $\sigma(y) = \inf\limits_{\alpha > 0:\, y \in C_1^{\alpha}} \alpha$.

Приведена абстрактная теорема, устанавливающая взаимно–однозначное соответствие между степенью гладкости вектора $x \in \mathcal{L}$ относительно оператора A и скоростью стремления к нулю функции $E_r(x)$ при $r \to \infty$. В частности,

$$x \in C_{\{m\}}(A) \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0\, \exists\, c > 0: \; E_r(x) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha r),$$

где $\rho(\lambda) = \sup\limits_n \frac{\lambda^n}{m_n}$.

Изложенный операторный подход позволил получить не только целый ряд как известных, так и новых теорем теории аппроксимации функций, но и точные априорные оценки погрешности приближения вариационными методами решений операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

Литература

1. М. Л. Горбачук, Ю. Г. Мокроусов, О плотности подпространств аналитических векторов замкнутого оператора в банаховом пространстве. — Функц. анализ и его прил. 35, № 1, 77–80 (2001).

2. М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук, Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу. — Укр. матем. журн. 47, № 5, 616–628 (1995).

3. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Операторный подход к задачам аппроксимации. — Алгебра и анализ 9, № 6, 90–108 (1997).

Риск в задачах при неопределенности

Жуковский В. И. (Москва, Россия)

Доклад посвящен теоретическим основам принятия "хороших" решений с учетом исходов и рисков в задачах при неопределенности, причем о неопределенностях известны лишь границы изменений, а какие-либо статистические характеристики отсутствуют.

1. Однокритериальная задача при неопределенности определяется упорядоченной тройкой

$$\Gamma = < X, Y, f_1(x,y) >,$$

где $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество альтернатив x, выбираемых лицом, принимающим решение, $Y \subset \mathbb{R}^m$ — множество неопределенностей y, $f_1(x,y)$ — критерий, заданный на $X \times Y$. Согласно принципу минимаксного сожаления (Savage) вводится функция риска

$$\varphi_1(x,y) = \max_{z \in X} f_1(z,y) - f_1(x,y).$$

Определение 1. Тройку $(x^s, f_1^s, \varphi_1^s) \in X \times \mathbb{R}^2$ назовем *гарантированным по исходу и риску решением* (ГИРС) задачи Γ, если $\exists\, y^s \in Y$, для которого $f_1^s = f_1(x^s, y^s)$, $\varphi_1^s = \varphi_1(x^s, y^s)$ и

1) при $\forall\, y \in Y$ несовместна система из двух неравенств $f_1(x^s, y) < f_1^s$, $\varphi_1(x^s, y) > \varphi_1^s$;

2) при $\forall x \in X$ несовместна система $f_1(x, y^s) > f_1^s$, $\varphi_1(x, y^s) < \varphi_1^s$.

Используя функцию $\psi_\gamma(x,y) = f_1(x,y) - (1-\gamma)\max\limits_{z \in X} f_1(z,y)$, $\quad \gamma = \mathrm{const} \in [0,1]$, устанавливается

Утверждение. Пусть $\exists\,(\alpha, \beta) \in [0,1]^2 \wedge (x^s, y^s) \in X \times Y$ такие, что

$$\max_{x \in X} \psi_\alpha(x, y^s) = \psi_\alpha(x^s, y^s), \quad \min_{y \in Y} \psi_\beta(x^s, y) = \psi_\beta(x^s, y^s),$$

тогда $(x^s, f_1(x^s, y^s), \varphi_1(x^s, y^s))$ является ГИРС Γ.

Обозначим $f_1(x,\mu) = \int\limits_Y f_1(x,y)\mu(dy)$, $\varphi_1(x,\mu) = \int\limits_Y \varphi_1(x,y)\mu(dy)$, где $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$ — множество вероятностных мер, определенных на компакте Y.

Аналогично определению 1, где заменяется $Y \to \{\mu\}$, $y \to \mu(\cdot)$, $f_1(x,y) \to f_1(x,\mu)$, $\varphi_1(x,y) \to \varphi_1(x,\mu)$ вводится понятие гарантированного по исходу и риску квазисмешанного решения (ГИРК) задачи Γ в виде $(x^s, f_1^s(x^s,\mu^s), \varphi_1(x^s,\mu^s))$.

Теорема 1. Пусть в Γ множества X, Y суть компакты, причем X выпукло и $f_1(x,y) \in C(X \times Y)$ и вогнута по x. Тогда ГИРК существует.

2. Многокритериальная задача при неопределенности определяется упорядоченным набором

$$\Gamma_N = \langle X, Y, f(x,y) \rangle,$$

где X и Y те же, что в Γ, а векторный критерий $f = (f_1, \dots, f_N)$. Для каждого критерия $f_i(x,y)$, $i \in \mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ вводится "своя"функция риска

$$\varphi_i(x,y) = \max_{z \in X} f_i(z,y) - f_i(x,y), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Используя $2N$–вектор $F = (f, -\varphi)$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, формализуем.

Определение 2. Тройку $(x^s, f(x^s,\mu^s), \varphi(x^s,\mu^s))$ назовем *гарантированным по исходам и рискам квазисмешанным решением* задачи Γ_N, если при $\forall\, y \in Y$ несовместна система неравенств $F(x^s,y) < F(x^s,\mu^s)$ и при всех $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$ несовместна система $F(x,\mu^s) > F(x^s,\mu^s)$ (т.е. альтернатива $x^s \in X$ максимальна по Слейтеру в $2N$–критериальной задаче $\langle X, \{f(x,\mu^s), -\varphi(x,\mu^s)\}\rangle$).

Теорема 2. Пусть в задаче Γ_N множества X и Y непустые компакты, X — выпукло, а критерии $f_i(x,y)$ $(i \in \mathbb{N})$ непрерывны на $X \times Y$ и вогнуты по x при каждом $y \in Y$. Тогда в Γ_N существует гарантированное по исходам и рискам квазисмешанное решение.

Работа поддержана грантом РФФИ №02–01–00612.

Решение уравнения Риккати как второй дифференциал функции Беллмана

Зеликин М. И. (Москва, Россия)

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t,x,u)\, dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \varphi(t,x,u); \quad \Phi_1(t_1, x(t_1)) = 0; \quad \Phi_2(t_2, x(t_2)) = 0; \quad u(t) \in U. \tag{2}$$

Здесь x — фазовые переменные, принадлежащие гладкому n–мерному многообразию M, управление $u(t) \in U$ непрерывно, функции f, φ, Φ_1, Φ_2 гладко зависят от своих аргументов. Обозначим подмногообразие левых концов (второе равенство (2)) через $M_1 \subset \mathbb{R} \times M$, правых концов (третье равенство (2)) — через $M_2 \subset \mathbb{R} \times M$.

Рассмотрим систему уравнений в вариациях для уравнений принципа максимума Понтрягина

$$\begin{cases} \dot{q} = H_{\psi x}(t,x,\psi)q + H_{\psi\psi}(t,x,\psi)p, \\ \dot{p} = -H_{xx}(t,x,\psi)q - H_{x\psi}(t,x,\psi)p. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим матричное уравнение Риккати для переноса лагранжевых плоскостей по решениям системы (3).

$$-\dot{W} = H_{xx} + H_{x\psi}W + WH_{\psi x} + WH_{\psi\psi}W. \tag{4}$$

Здесь $W = pq^{-1}$. При отсутствии фокальных точек как для левого, так и для правого концов и при некоторых естественных технических условиях верны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть решение $p_k(t)$, $q_k(t)$ уравнений (3) описывает эволюцию производных по начальным данным на многообразии левых $(k=1)$ и правых $(k=2)$ концов вдоль экстремали $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{\psi}(\cdot)$.

Тогда соответствующее решение $W_k(t) = p_k q_k^{-1}$ уравнения Риккати (4) задает гессиан функции Беллмана $S_k(t,x)$ для многообразия концов M_k $(k = 1,2)$

$$W_k(T) = \frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}(t, \hat{x}(t)). \tag{5}$$

Теорема 2. Необходимым условием для того, чтобы траектория $\hat{x}(\cdot)$ доставляла слабый минимум функционалу (1), является неотрицательность квадратичной формы с матрицей $(W_1(\tau) - W_2(\tau))$ при любом $\tau \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1)$.

Теорема 3. Достаточным условием для того, чтобы траектория $\hat{x}(\cdot)$ доставляла сильный минимум функционалу (1), является положительная опеределенность квадратичной формы с матрицей $(W_1(\tau) - W_2(\tau))$ при некотором $\tau \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$.

Следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков

Печенцов А. С., Козко А. И. (Москва, Россия)

В $L_2[0,\infty)$ рассмотрим самосопряженный полуограниченный снизу оператор $\mathbb{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$\ell(y) \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x) + p_{2n-2}(x)y^{(2n-2)}(x) + \ldots + p_0(x)y(x)$$

и граничными условиями

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Коэффициенты $p_i(x)$, $i = \overline{0, 2n-2}$ действительнозначные локально интегрируемые функции. Предположим, что спектр $\sigma(\mathbb{L})$ оператора $\mathbb{L}$ дискретный. Занумеруем все собственные значения λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ оператора $\mathbb{L}$ с учетом кратности в порядке возрастания $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$. Обозначим через $\mathbb{P}$ — оператор умножения в $L_2[0,\infty)$ на действительнозначную измеримую ограниченную финитную функцию $q(x)$. Оператор $\mathbb{L} + \mathbb{P}$ останется полуограниченным снизу с дискретным спектром $\sigma(\mathbb{L} + \mathbb{P})$. Занумеруем собственные значения μ_k, $k = 1, 2, \ldots$ оператора $\mathbb{L} + \mathbb{P}$ в порядке их возрастания $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$.

Теорема. Если функция $\psi(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x q(t)\,dt$ имеет ограниченную вариацию в некоторой правосторонней окрестности нуля, то справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} q(t)\,dt \right] = -\frac{\psi(+0)}{4},$$

где

$$c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2n}},\ c_k = \lambda_k^{\frac{1}{2n}} - \lambda_{k-1}^{\frac{1}{2n}},\ k = 2, 3, \ldots.$$

Пусть собственные значения λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ оператора $\mathbb{L}$ имеют асимптотику

$$\lambda_k = f(k) + o(g(k)),\ k \to +\infty,$$

где $f(k)$ — произвольная неубывающая последовательность действительных чисел, $f(k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, а для последовательности $g(k)$ выполняется неравенство

$$|g(k)| \leq C|f(k)|^{1-\frac{1}{2n}},\ C > 0.$$

Предположим, что функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ можно доопределить на луче $[1, +\infty)$ до непрерывно дифференцируемой функции так, чтобы производная функции $h(x) = f^{\frac{1}{2n}}(x)$ монотонно стремилась к нулю при $x \to +\infty$. Тогда существует такая постоянная ν, что

$$f^{\frac{1}{2n}}(N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2n} f'(k) f^{\frac{1}{2n}-1}(k) + \nu + o(1),\ N \to +\infty.$$

Следствие 1.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{1}{2\pi n} f^{\frac{1}{2n}-1}(k) f'(k) \int\limits_0^{+\infty} q(x)\,dx \right) = -\frac{1}{4}\psi(+0) + \frac{\nu}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} q(x)\,dx.$$

Следствие 2. Если $\lambda_k = ck^{\alpha} + o\left(k^{\alpha\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\right)$, $k \to \infty$, $c > 0$, $0 < \alpha \leq 2n$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k - \lambda_k - \frac{\alpha c^{\frac{1}{2n}}}{2\pi n} \int\limits_0^{+\infty} q(x)\,dxcdotk^{\frac{\alpha}{2n}-1} \right] = -\frac{1}{4}\psi(+0) - \frac{\tilde{\kappa}\alpha c^{\frac{1}{2n}}}{2\pi n} \int\limits_0^{+\infty} q(x)\,dx,$$

где постоянная $\tilde{\kappa}$ определяется равенством

$$\sum_{k=1}^{N} \kappa^{\frac{\alpha}{2n}-1} = \frac{2n}{\alpha} N^{\frac{\alpha}{2n}} + \tilde{\kappa} + o(1), \ N \to \infty.$$

Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор

Курина Г. А. (Воронеж, Россия)

Сингулярно возмущенным задачам управления посвящен ряд обзоров и монографий. Последним обзором, охватывающим много тем, является [1]. В обзоре [2] публикаций за 1984–2001 гг. перечислено очень много работ, посвященных применению теории сингулярных возмущений в различных задачах управления, но в нем очень мало постановок задач по тематике обзора и неполно отражены работы советских и российских авторов. Используя публикации с 1982 года, в докладе будут кратко изложены основные результаты, полученные при исследовании сингулярно возмущенных задач управления.

Так как условия оптимальности управления приводят к исследованию краевых задач, то в начале доклада обсуждаются методы построения асимптотики решения сингулярно возмущенных краевых задач. Далее, для различных классов задач оптимального управления рассматривается второй способ построения асимптотики решения задач с малым параметром, заключающийся в непосредственной подстановке в условия задачи постулируемого асимптотического разложения решения и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики. При этом устанавливается невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании новых членов асимптотического разложения оптимального управления.

При пренебрежении малым параметром в задачах управления может появиться система с необратимым оператором при производной. Поэтому в докладе приводятся некоторые результаты, касающиеся задач управления дифференциально–алгебраическими (дескрипторными) системами.

Рассматриваются задачи управления с обратной связью, H_∞ управления, задачи с ограничением на управление типа замкнутых неравенств, задачи управления распределенными системами, задачи управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости, задачи в условиях неопределенности, задачи со случайными возмущениями, игровые задачи, дискретные задачи. Также приводятся результаты работ, в которых исследуются поведение множеств достижимости, вибрационное и адаптивное управление, итерационные методы, метод усреднения, метод регуляризации С. А. Лапова. Заключительная часть доклада посвящена использованию систем компьютерной алгебры и приложениям.

Литература

1. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Мат. анализ. — 1982. — Т.20. — С. 3–77.

2. Naidu D.S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications and Algorithms. 2002. V.9. P.233–278.

Работа частично поддержана РФФИ (проект 02–01–00351)

Реализация в шкалах систем с последействием

Марченко В. М., Ж.-Ж. Луаззо (Минск, Беларусь; Нант, Франция)

Рассматривается проблема реализации переходных отображений в шкалах динамических систем с последействием. Изучаются свойства минимальных реализаций и их связь со свойствами управляемости и наблюдаемости. Основное внимание уделяется проблеме реализации в классе линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом. В этом классе дается эффективный алгоритм построения реализации, используя хорошо известный метод построения 2-D реализации первого уровня. Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых одновходная и одновыходная реализация является мимнимальной, что является обобщением соответствующих результатов Зонтага и Камена (Sontag, Kamen). Полученные результаты иллюстрируются на примерах.

Сингулярные характеристики в граничных условиях уравнения Гамильтона–Якоби

Меликян А. А. (Москва, Россия)

В граничных задачах для уравнений в частных производных первого порядка, возникающих в физике (уравнение Гамильтона–Якоби), теории управления (уравнение Беллмана), теории дифференциальных игр (уравнение Айзекса) существуют ситуации, когда на части границы значения искомой функции или вообще не заданы, или не являются пределом (обобщенного) решения задачи. Тем не менее, для построения решения (например, методом характеристик) подобные условия востребованы. В работе показано, что требуемые граничные значения могут быть выставлены как определенное "естественное" расширение условий, известных на краевых подмногообразиях данной части границы. Это расширение условий осуществляется с помощью характеристических кривых, стартующих на известном подмногообразии части границы и бегущих вдоль границы. Эти характеристики являются обобщением классических характеристик, ассоциированных с уравнением в частных производных. Они называются сингулярными характеристиками, их теория развита в ряде работ автора. После получения "естественных" граничных условий построение решения ведется обычным способом путем интегрирования уравнений классических характеристик. Данный подход иллюстрирован задачами из теории дифференциальных игр и теории обработки изображений.

Смешанные функционально–дифференциальные уравнения

Мышкис А. Д. (Москва, Россия)

Обзор одноименной статьи лектора, опубликованной в сборнике "Современная математика. Фундаментальные направления", Т. 4 (2003), С. 5–120. В ней под смешанным функционально–дифференциальным уравнением (СДУ) понимается ФДУ для функции более чем одного непрерывного аргумента, в котором (уравнении) производная от нее берется только по одному из этих аргументов, играющему роль времени. Остальные аргументы трактуются как пространственные, а оператор, действующий на них, является ограниченным (обычно разностным или интегральным). Типичным примером СДУ служит уравнение

$$\dot u(x,t) = F(x,t,u(x+g_1,t),\dots,u(x+g_k,t)) \quad (g_1<\dots<g_k),$$

причем в правую часть может входить также запаздывание во времени. Общий вид СДУ запаздывающего типа

$$\dot u(x,t) = f(x,t,u_{xt}), \tag{1}$$

где $u_{xt}(\xi,\tau) := u(x+\xi,t+\tau)$, $\xi\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, $-h\leqslant\tau\leqslant 0$ (при $h=0$ запаздывание отсутствует). Формулируются начальные и граничные условия, приводятся общие утверждения о разрешимости начально–краевой задачи для уравнения (1) и для уравнений нейтрального типа аналогичного вида.

Отдельная глава посвящена линейным СДУ. Здесь особо рассматриваются автономные СДУ (АУ) и пространственно–инвариантные СДУ (ПИУ). Для АУ с помощью преобразования Лапласа по t изучаются вопросы устойчивости по Ляпунову, а для ПИУ с помощью преобразования Фурье по x изучаются вопросы квадратичной устойчивости (при этом решение трактуется как траектория в $L^2(\mathbb{R}^m)$).

В последней главе рассматриваются уравнения, близкие к СДУ: это уравнения аналогичной структуры, но с целочисленными x или t.

Многочастотный авторезонанс и уиземовское усреднение интегрируемых систем

Новокшенов В. Ю. (Уфа, Россия)

Математическая теория авторезонанса хорошо разработана для случая одночастотного возбуждения. Это связано с процедурой усреднения, известной как метод Кузмака–Уизема или Боголюбова–Митропольского, которые обоснованы для нелинейных одночастотных систем ОДУ. В случае двух или более частот даже для гамильтоновых систем процедура усреднения наталкивается на хорошо известные трудности, связанные с малыми знаменателями.

Рассматривается задача о многочастотном резонансе в случае, когда невозмущенная система вполне интегрируема. Это означает, что каноническими преобразованиями она может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \varphi_0 + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \end{cases} \tag{4}$$

где (I, φ) — переменные действия-угол, $\varepsilon \ll 1$. Найдем условие возникновения авторезонанса, то есть существование решения с начальным условием $I = 0$, $\varphi = \mathrm{const}$, такого что

$$\|I\| = O(1), \quad t = O(\varepsilon^{-1}). \tag{5}$$

Согласно КАМ-теории, при почти всех начальных условиях n-периодическое возмущенное решение является обмоткой деформированных лиувиллевых торов невозмущенной системы. Последние зависят от первых интегралов системы, которые являются функциями медленной переменной $\tau = \varepsilon t$ и удовлетворяют уравнениям Кузмака–Уизема. Фазовые функции являются квазипериодическими, причем частоты определяются из (деформированных) первых интегралов.

Для анализа условий авторезонанса обратим описанную процедуру, а именно, для заданной деформации n-периодического решения найдем отвечающие ей правые части f и g. Более точно, предположим, что существует деформация системы (1), переводящая n-периодическое решение в m-периодическое за конечный интервал медленного времени ($t \sim O(\varepsilon^{-1})$). При этом правые части εf и εg, вообще говоря, не будут малы, более того, может разрушиться гамильтоновость системы. Чтобы избежать этого, наложим условия Кузмака–Уизема на первые интегралы, осуществляющие деформацию. Тогда, согласно теореме (1) о существовании уиземовских деформаций с заданными граничными условиями, правые части останутся малыми и система останется вполне интегрируемой в главной части по ε. Можно показать, что указанная процедура демонстрирует все характерные черты авторезонанса — медленный захват фазы и синхронизацию частот с частотами накачки.

Литература

1. Новокшенов В. Ю. Уиземовские деформации интегрируемых систем типа волчков // Функц. анал. т.27(2), 1993, С. 50–62.

Экзотические сферы Милнора

Овсеевич А. И. (Москва, Россия)

Доклад посвящен предстоящему 50–летию открытия Дж. Милнором неэквивалентных гладких структур на n–мерной сфере S^7.

Результат Милнора и последующее его развитие показывают, что нестандартные гладкие структуры не просто существуют, но получаются применением естественных и фундаментальных математических конструкций.

Метод Милнора состоит из "положительной" части, где доказывается гомеоморфизм $M \simeq S^7$ для некоторого явно заданного гладкого многообразия M и "отрицательной" части, где доказывается, что этот гомеоморфизм нельзя сгладить.

В докладе приводятся подробности о теореме Милнора и связанных результатах.

Спектральная проблема и представления алгебр

Попович С. В., Самойленко Ю. С. (Киев, Украина)

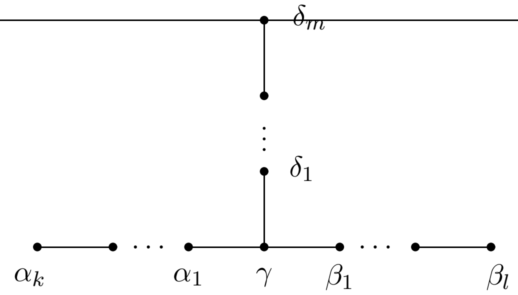
Спектральная проблема: Пусть M_1, M_2, M_3 — замкнутые множества на прямой $\mathbb{R}^1$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Существует ли тройка самосопряженных операторов A, B, C в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таких, что $\sigma(A) \subseteq M_1$, $\sigma(B) \subseteq M_2$, $\sigma(C) \subseteq M_3$, $A + B + C = \gamma I$, где $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора. Свяжем с конечными множествами

$$M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0\},\ 0 < \alpha_{i+1} < \alpha_i,\ \ i = \overline{1, k-1}$$

$$M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, 0\},\ 0 < \beta_{j+1} < \beta_j,\ \ j = \overline{1, l-1}$$

$$M_3 = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, 0\},\ 0 < \delta_{s+1} < \delta_s,\ \ s = \overline{1, m-1}$$

и алгебру $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,\gamma} = \mathbb{C} < p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l, r_1, r_2, \ldots, r_m |\, p_i p_j = \delta_{ij} p_i,\ q_i q_j = \delta_{ij} q_i,\ r_i r_j = \delta_{ij} r_i,$ $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i p_i + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_l q_l + \sum\limits_{s=1}^{m} \delta_s r_s = \gamma_l >$ и отмеченный граф



Решения спектральной проблемы (A, B, C) совпадают со $*$–представлениями алгебры $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,\gamma}$.

Оказывается, что сложность алгебры $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,\gamma}$ и связанной с ней спектральной проблемы существенно различна для графов, являющихся диаграммами Дынкина, расширенными диаграммами Дынкина и остальными.

В лекции, следуя [1,2], приведено решение спектральной проблемы для диаграмм Дынкина A_n $(n \geqslant 1)$, D_n $(n \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8.

Литература

1. С.А.Кругляк, С.В.Попович, Ю.С.Самойленко, Представления $*$–алгебр, ассоциированных с диаграммами Дынкина // Ученые записки Таврического национального университета, 16(2) (2003), 132–139.

2. М.В.Заводовский, Ю.С.Самойленко, О $*$–представлениях алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированных с графами Дынкина // Таврич. вестник информатики и математики (2004)

Обратные задачи для нестационарных уравнений

Прилепко А. И. (Москва, Россия)

Рассматривается ряд линейных и нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа и эволюционных уравнений в банаховом пространстве.

1^0. Рассмотрим одну из обратных задач. Найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$ из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + c(x)u + \Phi(x,t)f(x) & \text{в } Q = \Omega \times (0,T),\ T > 0 \\ u|_{t=0} = a(x) & u|_{\partial\Omega\times(0,\Gamma)} = b(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x,T) = \psi(x). \tag{2}$$

При соответствующих условиях исследуются случаи некорректности, фредгольмовости и корректности задачи (1)–(2). Например, если $f(x)$ ищется в классе $L_2(\Omega)$, $\psi \in W_2^2(\Omega)$, $\Phi \in W_2^1(Q)$, $\Phi(x,t) \geqslant 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \geqslant 0$ в $\bar{Q}$, $\Phi(x,T) \geqslant \delta_0 > 0$, $c(x) \leqslant 0$, $a = 0$, $b = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1)–(2) в классах $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ и имеется оценка устойчивости

$$\|f\| \leqslant C\|L\psi\|,\ \|u\| \leqslant C\|L\psi\|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant C\|L\psi\|,$$

где $L = \Delta + c(x)$, нормы берутся в пространстве $L_2(\Omega)$.

2^0. Аналогично ставится нелинейная обратная задача. Найти пару функций $u(x,t)$ и $c(x) \leqslant 0$ из условий

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + c(x)u + g(x,t) \text{ в } Q, \quad u\Big|_{t=0} = 0, \quad u\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = b(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,T) = \psi(x),\ T > 0. \tag{4}$$

При соответствующих ограничениях задача оказывается корректной.

3^0. Приводятся аналогичные постановки обратных задач для уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Указываются условия фредгольмовости и корректной разрешимости этих задач. Отмечается связь обратных задач с нелокальными по времени прямыми задачами. [1].

Литература

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. Marcel Dekker, New-York–Basel, 2000, 709 p.

О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов

Рыхлов В. С. (Саратов, Россия)

Исследуется $n-$ и $m-$кратная полнота ($m < n$) в $L_2[0,1]$ собственных функций (с.ф.) пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := \sum_{s+j=n} p_{sj}\lambda^s y^{(j)},\ p_{sj} \in \mathbb{C},\ p_{0n} \neq 0,$$

на интервале $[0,1]$ и двухточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu_0}(y,\lambda) + U_{\nu_1}(y,\lambda) := \sum_{s+j=n-1} \lambda^s[\alpha_{\nu sj} y^{(j)}(0) + \beta_{\nu sj} y^{(j)}(1)] = 0,\ \nu = \overline{1,n},$$

где $\alpha_{\nu sj},\ \beta_{\nu sj} \in \mathbb{C}$.

При некоторых весьма общих условиях на параметры пучка $L(\lambda)$ формулируются простые достаточные условия $n-$ и $m-$кратной полноты ($m < n$) в $L_2[0,1]$ с.ф. пучка $L(\lambda)$. При этом ряд результатов формулируется в терминах следующих вектор функций

$$V_j(\lambda) := \begin{bmatrix} U_{10}(y_j,\lambda) \\ U_{20}(y_j,\lambda) \\ \dots \\ U_{n0}(y_j,\lambda) \end{bmatrix},\ W_j(\lambda) := e^{-\lambda\omega_j} \begin{bmatrix} U_{11}(y_j,\lambda) \\ U_{21}(y_j,\lambda) \\ \dots \\ U_{n1}(y_j,\lambda) \end{bmatrix},\ j = \overline{1,n},$$

где через $\{y_j(x,\lambda)\}_1^n$ обозначена фундаментальная система решений $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, уравнения $l(y,\lambda) = 0$, $\{\omega_j\}_1^n$ есть корни характеристического уравнения

$$\sum_{s+j=n} p_{sj}\omega_j = 0.$$

Потенциалы с плотностью из пространства четких следов

Рябенький В. С. (Москва, Россия)

Потенциалы, которым посвящен доклад, составляют основу аппарата метода разностных потенциалов (МРП), современное состояние которого отражено в [1]. МРП предназначен для дискретного моделирования различных задач математической физики, а также для численного решения внутренних, внешних, стационарных и нестационарных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений и систем.

В докладе излагается общая схема построения потенциалов с плотностью из пространства четких следов, соответствующих псевдодифференциальных граничных уравнений с проекторами для решений дифференциальных и разностных уравнений, а также некоторые примеры конкретизации этой схемы. Потенциалы для решений дифференциальных уравнений, построенные по этой схеме, являются модификацией и обобщением потенциалов Кальдерона-Сили [2,3], которая вместо символов дифференциальных уравнений использует операторы Грина некоторых вспомогательных краевых задач в простых областях при простых краевых условиях, выбор которых допускает широкий произвол. В отличие от потенциалов Кальдерона потенциалы, построенные по этой схеме, допускают аппрроксимацию дискретными разностными потенциалами, которые построены для линейных разностных уравнений и систем на нерегулярной многомерной сетке и допускают использование компьютеров. Это придает МРП конструктивность.

Цель доклада — формулировка некоторых нерешенных вопросов теории потенциалов. Главным образом, это вопросы конкретизации общей схемы для различных интересных классов задач, при которой условные общие теоремы и конструкции из [1] становятся безусловными.

В докладе приводятся примеры прикладных задач из [1], которые уже решены с помощью МРП. Это сделано, чтобы обосновать содержательность теории и целесообразность ее развития.

Литература

1. Рябенький В. С. Метод разностных потенциалов и его приложения, М., Физматлит, 2002.

2. Calderon A.P. Proceeding of Soviet–American Symposium in Partial Differential Equations, Novosibirsk–Moscow,1964.

3. Seleey R.T., Singular Integrals, Amer. J. of Math, V.88 N4, 1966.

Работа поддержана грантом РФФИ 05–01–00801

Некоторые вопросы функционального анализа с точки зрения теории решеток

Самборский С. Н. (Université Caen, France)

Исследуется, как меняются важные понятия функционального анализа, если структура линейного пространства и, соответственно, линейных функционалов, заменяется структурой частичного порядка.

Аналогом классического гильбертова пространства L^2 становится вводимое автором пространство S, состоящее из классов эквивалентных функций. Отношение эквивалентности — это совпадение функций на некотором множестве второй категории по Бэру, а представители в этих классах — функции, у которых множество их точек непрерывности второй категории. В этом пространстве имеем структуру решетки, которая оказывается условно полной, а также векторного пространства.

В S вводится метрика, превращающая S в полное метрическое пространство и обладающая следующим замечательным свойством (основной результат доклада): если A — подрешетка в S, инвариантная относительно прибавления констант, то метрическая плотность A в S эквивалентна решетной плотности.

Гипотеза Камерона–Эрдеша

Сапоженко А. А. (Москва, Россия)

Множество A чисел называется свободным от сумм, если $a + b \notin A$ для любых $a, b \in A$. Пусть $s(n)$ — число множеств, свободных от сумм, в отрезке целых чисел $[1, n]$. П. Камерон и П. Эрдеш предположили, что $s(n) = O(2^{n/2})$. Сообщение состоит в доказательстве этой гипотезы. Точнее, доказывается, что $s(n) \sim C_0 \cdot 2^{n/2}$ при четных n и $s(n) \sim C_1 \cdot 2^{(n+1)/2}$ при нечетных n, где $C_0 = 6.0\ldots$, $C_1 = 5.0\ldots$.

Аппроксимация типа Мюнца–Саса в прямых произведениях пространств

Седлецкий А. М. (Москва, Россия)

Пусть $E_1 = E_1(0,1)$ и $E_2 = E_2(1,\infty)$ — банаховы пространства функций, определенных соответственно на $(0,1)$ и $(1,\infty)$, пусть $E = E_1 \otimes E_2$ — их прямое произведение, т.е. пространство функций, определенных на $\mathbb{R}_+$, с нормой

$$\|f\|_E = \|f_1\|_{E_1} + \|f_2\|_{E_2},$$

где f_1, f_2 — сужения f на $(0,1)$ и $(1,\infty)$ соответственно. Рассматривается вопрос о полноте систем экспонент

$$\left(e^{-\lambda_n t}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re}\lambda_n > 0 \tag{1}$$

в пространствах $E = E_1 \otimes E_2$. По теореме Саса условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty \tag{2}$$

эквивалентно полноте системы (1) в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Автором описаны широкие классы пространств E_1, E_2, когда условие (2): 1) необходимо для полноты системы (1) в E, 2) достаточно для такой полноты. В качестве следствия получено расширение теоремы Саса, т.е. предложен набор пространств E_1, таких, что условие (2) необходимо и достаточно для полноты системы (1) в пространстве $E_1 \otimes W_2^m(1,\infty)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Эволюционная задача с интегральным условием

Сильченко Ю. Т. (Воронеж, Россия)

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(t)$ — семейство линейных операторов с областью определения $D(A(t)) = D_t$, для которых при каждом t существует ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)$, являющиеся непрерывно дифференцируемыми в норме $L(E)$. Предполагается, что существует семейство линейных ограниченных операторов (разрешающих операторов задачи Коши) $U(t,s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$ со свойствами:

1) $U(t,s): E \to D_t$; 2) $U(t,s) = U(t,\tau)U(\tau,s)$ $(s \leqslant \tau \leqslant t)$;

3) $U(t,t) = I$; 4) $\partial U(t,s)/\partial t = A(t)U(t,s)$ в смысле нормы $L(E)$ и непрерывно по $t > s$;

5) $\|U(t,s)\| \leqslant \exp[-\omega(t-s)]$ при некотором $\omega > 0$.

Ставится задача отыскания классического решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\int_0^1 \varphi(t)x(t)\,dt = x_0, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi(0) \neq 0$, x_0 — заданный элемент.

Теорема. Пусть выполнены условия:

$$\left|\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)}\right| \|A(0)A^{-1}(1)\| \leqslant q, \quad \frac{1}{|\varphi(0)|}\|A(0)[\varphi(t)A^{-1}(t)']\| \leqslant q$$

с некоторым $q < 1$. Тогда для любого $x_0 \in D_0$ решение задачи (1)–(2) существует и единственно.

Отметим, что условие $x_0 \in D_0$ является необходимым. Достаточными для разрешимости задачи (1)–(2) являются условия:

$$\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt, \quad \int_0^1 \|A(t)\|\,dt < 1 \quad \text{или} \quad \sup_t \|A(t)\| < 2:$$

при любом $x_0 \in E$.

Работа поддержана РФФИ, проект 04–01–0014.

Квазиавтомодельность собственных значений сфероидальных волновых функций

Скороходов С. Л. (Москва, Россия)

Разработан эффективный метод вычисления угловых и радиальных сфероидальных функций в общем случае комплексных параметров и аргумента. Метод основан на построении разложений в особых и регулярных точках и на численно устойчивом решении разностных уравнений для коэффициентов разложений.

Для собственных значений $\lambda(m,n,c)$, где c — параметр вытянутости сфероида, m — номер гармоники вдоль параллели, n — номер собственного значения, введена новая переменная $d = d(m,n,c)$ и получена зависимость $\lambda = n(n+1)\Phi(m,n,d)$ такая, что несколько первых коэффициентов разложения функции $\Phi(m,n,d)$ в точках $d = 0$ и $d = \infty$ не зависят от параметров m и n. Это свойство обеспечивает высокоточное совпадение функций $\Phi(m,n,d)$ при $d \in [0,\infty)$ и различных значениях m и n и позволяет ввести понятие квазиавтомодельности значений $\lambda(m,n,c)$. Увеличивая число не зависящих от m и n коэффициентов разложения функции $\Phi(m,n,d)$, последовательно получаем все более точное совпадение функций $\Phi(m,n,d)$; при этом зависимость $c = c(m,n,d)$ является рациональной функцией от m, n и d все более высокой степени. Обширные высокоточные вычисления и использование символьных преобразований в системе компьютерной алгебры MAPLE–9 подтвердили эффективность полученных зависимостей.

Работа выполнена прифинансовой поддержке РФФИ (коды проектов 04–01–00773 и 04–01–00723)

Компактные и некомпактные возмущения нелокальных эллиптических краевых задач

Скубачевский А. Л. (Москва, Россия)

Рассматривается уравнение Пуассона в ограниченной области Q с конечным числом угловых точек или ребер. На гладком $(n-1)$–мерном многообразии $\Gamma_1 \subset \partial Q$ задается связь между значениями неизвестной функции в каждой точке $x \in \Gamma_1$ с ее значениями в точке $\omega(x)$ с коэффициентом $b \in C^\infty$, где ω — диффеоморфизм, отображающий некоторое открытое множество γ ($\bar{\Gamma}_1 \subset \gamma$) на $\omega(\gamma)$ так, что $\omega(\Gamma_1) \subset Q$. На гладком $(n-1)$–мерном многообразии $\Gamma_2 = \partial Q \backslash \Gamma_1$ задаются условия Дирихле.

Показано, что нелокальный член $b(x)u(\omega(x))|_{\Gamma_1}$ не является компактным возмущением. Тем не менее, в случае, когда $\Gamma_2 = \varnothing$ и $\omega(\partial Q) \subset Q$ доказано, что рассматриваемую нелокальную задачу можно свести к операторному уравнению в пространстве Соболева вида $(I+T)v = f$, где T — компактный оператор. В случае $\Gamma_2 \neq \varnothing$ и $\omega(\bar{\Gamma}_1) \cap \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \varnothing$ рассматриваемая нелокальная задача сводится к операторному уравнению в весовом пространстве Кондратьева $(I + T_1 + T_2)v = f$, где T_1, T_2^2 — компактные операторы. В случае $\Gamma_2 = \varnothing$ и $\omega(\bar{\Gamma}_1) \cap \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 \neq \varnothing$ аналогичный результат является неверным, т.к. соответствующая локальная задача Дирихле может быть фредгольмовой, а нелокальная задача — нефредгольмовой и наоборот. Результаты обобщены на правильно эллиптические уравнения порядка $2m$ с общими краевыми условиями и соответствующими нелокальными членами.

О неустойчивости фигур равновесия вращающейся вязкой несжимаемой капиллярной жидкости

Солонников В. А. (Санкт-Петербург, Россия)

Фигура равновесия $\mathcal{F}$ несжимаемой жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения и самогравитации и вращающейся как твердое тело вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью ω, определяется уравнением

$$\sigma\mathcal{H}(x) + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \varkappa\mathcal{U}(x) + p_0 = 0, \quad x \in \mathcal{G} \equiv \partial\mathcal{F}, \tag{1}$$

где $p_0 = \mathrm{const}$, σ — положительный коэффициент поверхностного натяжения, $\varkappa$ — гравитационная постоянная, $\mathcal{H}(x)$ — удвоенная средняя кривизна $\mathcal{G}$ в точке x (отрицательная для выпуклых поверхностей), $\mathcal{U}(x) = \int_{\mathcal{F}} |x-y|^{-1}\, dy$ — ньютонов потенциал; плотность жидкости принята равной единице. Случай отсутствия гравитации ($\varkappa = 0$) не исключается. Предполагается, что центр тяжести $\mathcal{F}$ находится в начале координат. Угловой момент вращающейся жидкости параллелен оси вращения и величина его равна $\beta = \omega \int_{\mathcal{F}} (x_1^2 + x_2^2)\, dx$.

Уравнение (1) является уравнением Эйлера для функционала потенциальной энергии

$$R = \sigma|\Gamma| + \frac{\beta^2}{\int_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\, dx} - \frac{x}{2}\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \frac{dxdy}{|x-y|} - p_0|\Omega|,$$

определенного на множестве областей Ω близких к $\mathcal{F}$; $\Gamma = \partial\Omega$. Общепринятым критерием устойчивости $\mathcal{F}$ является положительность второй вариации R. Если $\Gamma = \{x = y + N(y)\rho(y),\, y \in \mathcal{G}\}$, где N — единичная внешняя нормаль к $\mathcal{G}$, то

$$\delta^2 R[\rho] = \int\limits_{\mathcal{G}} (\sigma|\nabla_{\mathcal{G}} Q(y)|^2 - b(y)\rho^2)\, dS - \varkappa\int\limits_{\mathcal{G}}\int\limits_{\mathcal{G}} \rho(y)\rho(z)\frac{dS_y dS_z}{|z-y|} +$$

$$+\frac{\beta^2}{\int_{\mathcal{F}}(x_1^2 + x_2^2)\, dx}\left(\int\limits_{\mathcal{G}} \rho|y'|^2 dS\right)^2, \quad b = \sigma(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}) + \varkappa\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial N} + \omega^2(y_1N_1 + y_2N_2),$$

$\mathcal{K}(y)$ — гауссова кривизна $\mathcal{G}$. Функция $\rho(y)$ должна удовлетворять условиям ортогональности

$$\int\limits_{\mathcal{G}} \rho(y)\, dS = 0, \quad \int\limits_{\mathcal{G}} \rho(y)y_i\, dS = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Строгое оправдание этого критерия, основанное на анализе поведения решения эволюционной задачи для возмущений скорости, давления и свободной границы жидкости, дано в [1–3]. Настоящее сообщение посвящено доказательству неустойчивости осесимметричной фигуры $\mathcal{F}$, когда условие $\delta^2 R > 0$ нарушено. Основным моментом является исследование линеаризованной задачи для возмущения, основанное на идеях Н. Д. Копачевского, изложенных в [4], гл.9.

Литература

1. M. Padula, V. A. Solonnikov. Existence of non-steady flows of an incompressible viscous drop of fluid in a frame rotating with finite angular velocity. In: Elliptic and parabolic problems, World Science Publishers, River Edge, N.Y.(2002), 180–203.

2. В. А. Солонников. Об устойчивости осесимметрических фигур равновесия вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Алгебра и анализ, 16 (2004), вып.2, 120–153.

3. V. A. Solonnikov. On the stability of non-symmetric equilibrium figures of rotating viscous incompressible fluid. Interfaces and free boundaries (в печати).

4. N.D. Kopachevsky, S.G. Krein. Operator approach to linear problems of hydrodynamics, Vol.II, Birkhauser, 2003.

Математические аспекты анализа динамики социо–экономических систем

Сонис М. (Университет Бар–Илан, Израиль)

В этом докладе рассматриваются следующие вопросы, требующие детального использования математических структур и их дальнейшего развития:

I. Принципы и механизмы усложнения/упрощения структуры и эволюции сложных социо–экономических систем.

II. Использование эмпирических регулярностей социальных наук.

1. Принцип суперпозиции и принцип оптимизации в линейных системах и теория выпуклых многогранников.

2. Экономические системы Затрат–Выпуска Леонтьева и теория произвольных возмущений обратных матриц — поля влияния возмущений.

3. Вероятностные распределения на плоскости и в пространстве и теория дискретных нелинейных вероятностных цепей и их приложение к теории предсказаний.

4. Диффузия нововведений в обществе и пространстве и теория лог-линейных систем дифференциальных уравнений.

5. Социальные элиты и принцип коллективности в индивидуальном выборе "Человека Социального"в коллективах — вариационный анализ столкновения культур как реализация принципа агрессивного неприятия.

6. Дискретная нелинейная социодинамика и исчисление бифуркаций.

Изложение принципов и механизмов социо-экономической пространственной динамики иллюстрируется многочисленными примерами из социальных наук: из теории миграции, теории центральных мест, теории пространственных производственных циклов, теории фрагментации производства, линейного и выпуклого программирования, теории игр, теории многоцелевого программирования, динамической теории затрат-выпуска, теории полей влияния технологических нововведений, теории прогнозирования дискретных вероятностных цепей, теории диффузии нововведений и теории этногенеза.

Критические бифуркационные многообразия нелинейной дискретной динамики в конечномерном пространстве

Сонис М. (Университет Бар–Илан, Израиль)

В этой статье представлена процедура локального бифуркационного анализа нелинейной конечномерной динамики. Эта процедура основана на движении неподвижных точек нелинейной динамики в пространстве орбит. Классический метод Кона–Шура асимптотической устойчивости раскрывает тонкую структуру трех критических бифуркационных многообразий: двух гиперплоскостей — расходимости и дву-периодического удвоения и седлового флаттерного многообразия, порожденного движениями конечномерных симплексов в пространстве орбит.

Исчисление бифуркаций конечномерной нелинейной дискретной динамики представлено в виде последовательности вычислительных этапов, изображающих содержание анализа. Визуализация Исчисления бифуркаций демонстрируется примером общеизвестного преобразования Энно и примером дискретной динамики распределения Труда и Капитала в центре и периферии экономической системы в пространстве.

О некоторых дискретных моделях финансового рынка

Стебловская В. Р. (Boston, USA)

Рассматриваются модели современного финансового рынка с дискретным временем. Подробно вводится базовая бинарная модель (Cox–Ross–Rubinstein, 1976) и ее обобщения в работах Tessitore–Zabczyk (1996), А. В. и С. А. Нагаевых (2002). Приводятся новые вычислительные аспекты модели Нагаевых, полученные в 2003–2004 годах L. Kimball, В. Р. Стебловской и А. В. Нагаевым. Также рассматривается двумерная бинарная модель (А. В. Нагаев, В. Р. Стебловская, 2004). Обсуждаются вопросы полноты рынка, а также хеджирование и оценивание европейских опционов в условиях неполного рынка.

Double operator integrals and commutators

Sukochev F. A. (Flinders University, Adelaide, Australia)

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ be a semi-finite von Neumann algebra equipped with faithful normal semi-finite trace τ. If $E(0,\infty)$ is a rearrangement invariant function space, then $\mathcal{E} = E(M,\tau)$ denotes the corresponding "non-commutative symmetric operator space". If $M = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ and $\tau = T_\Gamma$, then $\mathcal{E}$ is a (classical) symmetrically normed ideal of compact operators. An $\mathbb{R}$–flow on (M,τ) is an ultra-weakly continuous representation $\gamma = \{\gamma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ on M by $*$–automorphisms of M, which are τ–invariant. Representation γ_t has a unique extension γ_t^E on $\mathcal{E}$. The group $\{\gamma_t^E\}_{t\in\mathbb{R}}$ is a strongly continuous group whenever $E(0,\infty)$ is a separable space. Let infinitesimal generator δ^E of $\{\gamma_t^E\}_{t\in\mathbb{R}}$ be defined as follows:

$$Dom(\delta^E) = \{x \in \mathcal{E} : \|\cdot\|_\varepsilon - \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_t^E(x) - x}{t} \text{ exists}\},$$

$$\delta^E(x) = \|\cdot\|_\varepsilon - \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_t^E(x) - x}{t},\ x \in Dom(\delta^E).$$

δ^E is a densely defined closed operator whenever $E(0,\infty)$ is a separable space, moreover, $\delta^E(x^*) = (\delta^E(x))^*$,

$$\delta^E(xy) = \delta^E(x)y + x\delta^E(y),\ x \in \mathcal{E}\cap M,\ y \in \mathcal{E}\cap M.$$

Hence, δ^E is a partially defined derivation on M.

In this talk we discuss the following

Problem. For which scalar functions f, we have $f(x) \in Dom(\delta^E)$ whenever $x = x^* \in Dom(\delta^E)$?

In particular, it is shown that the answer is positive for every $f \in C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ and every separable E. Furthermore, if $E = L_2(0,\infty)$, then the result holds for an arbitrary $f \in C^1$ such that $f(0) = 0$.

Применение сингулярных многообразий в задачах управления с фазовыми ограничениями

Хапаев М. М. (Москва, Россия)

Вводятся в рассмотрение системы дифференциальных уравнений, правые части которых обращаются в ∞ на некоторых гиперповерхностях в пространстве переменных, они называются сингулярными многообразиями. Предлагается классификация этих многообразий. Рассматривается задача управления динамической системой с фазовыми ограничениями и ограничениями на управления. Имеющиеся ограничения вводятся в систему как сингулярные многообразия. При этом для управлений также записываются дифференциальные уравнения, содержащие ограничения в качестве сингулярных многообразий. Таким образом, задача с ограничениями на фазовые переменные и управления сведена к задаче без ограничений, но с сингулярными многообразиями. Аналогичный подход возможен и в задачах оптимального управления.

Операторные пучки 2-го порядка и дробно–линейные отношения

Хацкевич В. А. (Кармиэль, Израиль)

Рассматриваются 2 понятия: операторный пучок и операторное дробно–линейное отношение — в их взаимосвязи и взаимовлиянии. При этом, условно говоря, отношения — предмет, пучки — метод изучения. Вместе с тем, рассматриваются задачи, формально далеко выходящие за рамки пучков и отношений, но в то же время, тесно с ними внутренне связанные. Также приводятся разнообразные приложения, в том числе, к неавтономным динамическим системам.

Рассматриваются 3 случая:

I. Линейные пучки $P(X) = A + BX$ и общие свойства дробно–линейных отношений.

II. Квадратичные пучки $P(X) = XAX + XB + CX + D$ и неподвижные точки дробно–линейных отношений.

III. Самосопряженные квадратичные пучки $P(X) = X^*AX + X^*B + B^*X + C$ с $A = A^*$ и $C = C^*$, и тополого–геометрические свойства дробно–линейных отношений: выпуклость и компактность в слабой операторной топологии образов Im и прообразов Dom дробно–линейных отношений.

Интегральные операторы с ядрами, разрывными на диагоналях

Хромов А. П. (Саратов, Россия)

В докладе рассматривается интегральный оператор

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \quad \alpha^2 \neq 1, \tag{1}$$

где $A(x,t)$ удовлетворяет условиям: $\frac{\partial^s t^j}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)$ при $s+j \leqslant 2$ непрерывны и $A(x,x) \equiv 1$. Оператор (1) является одним из наиболее простых видов интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагонали и кодиагонали.

Теорема 1 (равносходимости). Если $f(x) \in L[0,1]$, то имеет место

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon} |S_r(x,f) - \sigma_{r|d|}(x,f)| = 0,$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $d^2 = \alpha^2 - 1$, $S_r(x,f)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(x,f)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех номеров k, для которых $k\pi < r$.

Теорема 2 (абсолютной сходимости). Если дополнительно предположить, что $\frac{\partial}{\partial x} A(x,x) \equiv 0$, то для всякой функции $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1] \cap Lip\alpha$ при $\alpha > 0$ и $f(0) = f(1) = 0$ имеет место оценка:

$$\sum_m |\int\limits_{\gamma_m} R_\lambda f\,d\lambda| \leqslant C,$$

где $C > 0$, γ_m — окружности в λ-плоскости одного и того же радиуса δ с центрами в λ_k.

Эти факты получены совместно с В. В. Корневым.

Полугруппа распределений с сингулярностью в нуле

Чернышов К. И. (Воронеж, Россия)

При изучении определенных типов линейных дифференциальных включений в банаховом пространстве X или линейных дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной, действующим из банахова пространства X в банахово пространство Y, возникают полугруппы распределений, определяемые на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ (на $\overline{\mathbb{R}}_+$) с помощью некоторой вырожденной сильно непрерывной полугруппы операторов.

Под полугруппой распределений в $\mathbb{R}_+$ (в $\overline{\mathbb{R}}_+$) понимается всякий непрерывный (в традиционном понимании) гомоморфизм $\mathcal{F}$ из алгебры $\mathcal{D}_+ \in \{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+), \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)\}$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем и с операцией умножения – сверткой функций в алгебру $End\ X$.

Исследуется класс $DS(0)$ так называемых разложимых полугрупп распределений с сингулярностью в нуле. Получены формулы для регулярной и сингулярной частей разложимой полугруппы $\mathcal{F} \in DS(0)$, а также для ее генератора $\mathcal{A}$, являющегося линейным отношением (многозначным линейным оператором) на X. Приводятся необходимые и достаточные условия того, что замкнутое линейное отношение является генератором некоторой разложимой полугруппы распределений $\mathcal{F} \in DS(0)$.

Рассматривается вопрос о представлении ограниченных решений для линейного дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}\, x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

когда функция f принадлежит банаховому пространству $C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X.

Глобальный аттрактор полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией

Чуешов И. Д. (Харьков, Украина)

Изучается асимптотическая динамика волнового уравнения вида

$$u_{tt} + g(u_t) - \Delta u + f(u) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \ t > 0.$$

При некоторых условиях на нелинейные функции g и f доказано существование глобального аттрактора и конечность его фрактальной размерности. Представленный подход опирается на далеко идущие обобщения теоремы Лопеса–Церона об асимптотической компактности и теоремы Ладыженской о размерности инвариантных множеств. Представленные результаты получены совместно с И. Лашецкой [1].

Литература

1. Chueshov I., Lasiecka I. Attractors for second order evolution equations with a nonlinear damping // J. Dyn. Dif. Eqs., 2004 (to appear).

Spectral portraits of non self-adjoint Sturm-Liouville problems in the quasiclassical limit

Shkalikov A. A. (Moscow, Russia)

We shall describe the spectrum behaviour of the problem

$$\begin{gathered} i\varepsilon^2 y'' + q(x)y = \lambda y \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

as $\varepsilon \to 0$. Here $\varepsilon > 0$, $q(x)$ is a real function and λ is the spectral parameter. It is known that the problem in question is closely connected with the celebrated Orr–Sommerfeld problem arising in hydrodynamics.

There are papers which treat this problem for particular functions $q(x) = x$ (the so-called Couette profile), $q(x) = (x+\beta)^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ (Couette-Poiseuille profile) and for some analytic monotone functions on $[-1, 1]$. Our goal is to extend these results for much more general analytic functions. For short we restrict ourself to the case of polynomial $q(x)$.

We say that a point $\mu \in \mathbb{R}$ belongs to *the limit spectral graph* of problem (1) if given any $\delta > 0$ the δ-neighbourhood of μ contains the eigenvalues of the problem for all $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$ provided that $\varepsilon_0(\delta)$ is small enough.

Theorem. Let $\xi_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, n$ be the zeros of $q(z) - \lambda$. Consider the lines

$$\gamma_\infty = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)}\, d\xi = 0 \right\},$$

$$\gamma_j^\pm = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{\xi_j(\lambda)}^{\pm 1} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)}\, d\xi = 0 \right\},$$

$$\gamma_{jk} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{\xi_j(\lambda)}^{\xi_k(\lambda)} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)}\, d\xi = 0 \right\}.$$

Denote by Γ_0 the limit spectral graph of problem (1) and by Γ the union of all the curves above. Then Γ_0 is a connected subset of Γ.

Here we do not explain how to choose the path of integration in the definition of the curves. Certainly, Theorem remains valid if we include in Γ all the curves with all possible paths not intersecting the zeros $\xi_s(\lambda)$ (which are not the end points). Actually, only some parts of the curves γ_∞, $\gamma_j^\pm$ and γ_{jk} do belong to the limit spectral graph Γ_0 (some of these parts can be empty). We can provide the rule how to determine if a curve of Γ between two neighbouring intersection points does belong to Γ_0.

Операторный синтез и приложения к дифференциальным уравнениям

Шульман В. С. (Вологда, Россия)

Показано, что пространство ограниченных обобщенных решений уравнения

$$p\left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0$$

полностью определено многообразием нулей многочлена p. Аналогичное утверждение в трехмерном случае несправедливо.

Доказательство основано на общих результатах операторного синтеза для систем линейных операторных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X B_k = 0,$$

где $\{A_k\}_{k=1}^n$, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — коммутативные наборы нормальных операторов. Эти результаты, в свою очередь, используют технику аппроксимативных обратных сплетений для операторов умножения в различных симметрично-нормированных идеалах. Та же техника позволяет получать результаты о следах коммутаторов и количественные варианты теорем типа Фуглида–Патнэма.

4

На девяти секционных заседаниях было сделано более 60 докладов. Дневной график работы Школы состоял из трех утренних лекций (9.10–10.00, 10.10–11.00, 11.10–12.00), двух послеобеденных лекций (16.10–17.00, 17.10–18.00) и вечерних секционных семинаров (с 19.15).

Как и на предыдущих Крымских Осенних Школах, в свободное время участники Школы наслаждались чистейшим, теплым морем, реликтовым лесом, неповторимой природой всей прекрасной двенадцатикилометровой дуги залива от мыса, Сарыч до мыса Айя, и окаймляющих его гор Куш-Кая и Ильяс-Кая. Культурная программа включала пешеходные и автобусные экскурсии, лекции о Крыме, замечательный концерт на традиционном банкете Школы. Участники Школы отметили 70-летие со дня рождения известного математика Л. Р. Волевича. Дипломы почетного доктора КРОМШ получили математики, активно участвовавшие в работе 10-ти Крымских Осенних Математических Школ: старший научный сотрудник Г. Ц. Чикрий и профессор Ю. Т. Сильченко. К началу работы КРОМШ-2004 был издан сборник трудов предыдущей школы "Spectral and Evolution Problems. V.14 — Simferopol, 2005", содержащий 30 статей общим объемом 276 стр.

Начата подготовка к изданию сборника трудов КРОМШ-2004. Принято решение о проведении следующей, 16-ой Крымской Осенней Математической Школы в 2005 г., в Ласпи-Батилимане, в традиционные сроки: с 18 по 29 сентября. Рассылка первого сообщения планируется в середине января 2005 г.

Подробную информацию о КРОМШ можно получить по электронным адресам: old@tnu.crimea.ua, kromsh@crimea.com, Starkov_Science@Pochta.ru, а также на нашей web-странице в Интернете: www.tnu.crimea.ua/conf/kromsh.

В настоящем сборнике трудов КРОМШ-2004 представлены как материалы лекций и докладов, сделанных на Школе, так и некоторые работы участников, формально не доложенные на Школе.

Section 1

SPECTRAL PROBLEMS

Spectral Theory of Not Self-Adjoint Operators

Spectral Theory of Operator Pencils

О РЕФЛЕКСИВНОСТИ ОПЕРАТОРА $(V_{q,w}f)(x) = q(x)\int_0^x f(t)w(t)dt$ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p[0,1]$

И. Ю. Доманов

Keywords: Рефлексивный оператор, бикоммутант

Пусть $q(\cdot) \in L_p[0,1]$, $w(\cdot) \in L_{p'}[0,1]$ и $\overline{q(x)w(x)} = q(x)w(x) \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. В работе получен критерий рефлексивности натуральных степеней оператора $V_{q,w}$ в пространстве $L_p[0,1]$.

Пусть X —банахово пространство, $\mathsf{B}[X]$—пространство ограниченных линейных операторов, действующих в X, $\mathsf{Lat}A$ — решетка всех инвариантных подпространств оператора A, $\mathsf{AlgLat}A$—алгебра операторов в $\mathsf{B}[X]$, оставляющих инвариантным каждое подпространство из $\mathsf{Lat}A$, $\mathsf{Alg}A$ — слабо-замкнутая подалгебра $\mathsf{B}[X]$, порождённая оператором $A \in \mathsf{B}[X]$ и единичным оператором $\mathbb{I}$, $\{A\}''$ — бикоммутант оператора A.

Определение 1. [8]Оператор A называют рефлексивным, если $\mathsf{AlgLat}A = \mathsf{Alg}A$.

Другими словами, оператор A рефлексивный, если любой оператор B, такой что $\mathsf{Lat}A \subseteq \mathsf{Lat}B$, может быть приближен полиномами от A в слабой операторной топологии.

Отметим, что доказательству рефлексивности различных классов операторов посвящено значительное число работ (см. [5] и ссылки там).

Пусть $q(\cdot) \in L_p[0,1]$, $w(\cdot) \in L_{p'}[0,1]$ и $\overline{q(x)w(x)} = q(x)w(x) \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. При этих ограничениях оператор

$$(V_{q,w})f(x) \to q(x)\int_0^x f(t)w(t)dt \tag{6}$$

является квазинильпотентным и компактным в $L_p[0,1]$.

Отметим, что операторы вида (1), действующие из $L_p[0,\infty)$ в $L_q[0,\infty)$ представляют интерес в теории броуновского движения. Так, в недавней работе [6] найдена асимптотика аппроксимативных и энтропийных чисел оператора $V_{q,w} : L_p[0,\infty) \longrightarrow L_q[0,\infty)$. Там же обсуждаются применения этих результатов к взвешенным винеровским процессам.

В [4] была доказана одноклеточность оператора $V_{q,w}$ в случае, когда функции $q(\cdot)$, $w(\cdot)$ положительны и непрерывны. В [1]-[3] был получен критерий одноклеточности оператора $V_{q,w}^{\alpha}$, описаны его циклические подпространств и подсчитана спектральная кратность.

В данной заметке получены результаты об операторных алгебрах связанных с оператором $V_{q,w}^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_+$). В частности, мы находим критерий рефлексивности оператора $V_{q,w}^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_+$).

Для $f \in L_p[0,1]$ и $f(x) \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1]$ определим $N(f)$, как число перемен знака функции f, то есть как число точек в которых функция $F(x) := \int_0^x (\mathsf{sign} f)(t)dt$ недифференцируема. Если $f \in C[0,1]$, то определение $N(f)$ совпадает с обычным.

В доказательствах следующих теорем использованы некоторые результаты из [7].

Теорема 1. $\mathsf{Alg}V_{q,w}^{\alpha} = \{V_{q,w}^{\alpha}\}'' = \{V_{q,w}^{\alpha}\}'$, *если и только если либо $N(qw) = 0$, либо $N(qw) = 1$ и α нечетно.*

Теорема 2. $\mathsf{Alg}V_{q,w}^{\alpha} = \{V_{q,w}^{\alpha}\}'' \neq \{V_{q,w}^{\alpha}\}'$, *если и только если либо $N(qw) \geqslant 2$, либо $N(qw) = 1$ и α четно.*

Следствие 1. $\mathsf{Alg}V_{q,w}^{\alpha} = \{V_{q,w}^{\alpha}\}''$.

Теорема 3. *Пусть α четно. Тогда оператор $V_{q,w}^{\alpha}$ рефлексивен.*

Теорема 4. *Пусть α нечетно. Тогда оператор $V_{q,w}^{\alpha}$ рефлексивен, тогда и только тогда, когда $N(qw) \geqslant 4$.*

Список литературы

[1] Доманов И. Ю. *Спектральный анализ степеней оператора* $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)w(t)dt.//$ Математические заметки. 2003, Т.73, N3, с. 444-448.

[2] Доманов И. Ю. *О циклических подпространствах оператора* $(V_{q,w}f)(x) = \int_0^x f(t)w(t)dt.//$ Усп.Матем.Наук. 2003, Т.58, N1, с. 183-184.

[3] Доманов И. Ю. *О циклических подпространствах и одноклеточности оператора* $(Vf)(x) = q(x)\int\limits_0^x w(t)f(t)dt.//$ Укр.Матем.Вестник.2004, Т.1, N2, с. 19-61.

[4] Kang Joo Ho *On the Unicellularity of Volterra-Type Integral Operators*// Kyungpook Mathematical Journal 1990, v. 30, p. 1-6.

[5] Kapustin V. V. *Reflexivity of operators: general methods and criterion for almost isometric contractions.*//St.Petersburg Math.J. 1993, v.4, N2, p. 319-335.

[6] Lifshits M. A., Linde W. *Approximation and Entropy Numbers of Volterra operators with Application to Brownian Motion*// Mem.Amer.Math.Soc. 2002, v. 157, N 745, P.87.

[7] Malamud M. M. *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators*// Operator theory 1997, Advances and Applicanions, vol. Integral and Differential Operators, p.137-161.

[8] Radjavi H., Rosenthal P. *Invariant Subspaces*// Springer-Verlag New-York, 1973.

Украина, 83114, г. Донецк, ул. Розы-Люксембург, 74, Институт прикладной математики и механики НАН Украины

E-mail: `domanov@iamm.ac.donetsk.ua, domanovi@yahoo.com`

I. Yu. Domanov *On the reflexivity of the operator* $(V_{q,w}f)(x) = q(x)\int_0^x f(t)w(t)dt$ *in* $L_p[0,1]$

Let $q(\cdot) \in L_p[0,1]$, $w(\cdot) \in L_{p'}[0,1]$ and $\overline{q(x)w(x)} = q(x)w(x) \neq 0$ for a.a. $x \in [0,1]$. The criteria of the reflexivity of the operator $(V_{q,w}f)(x) = q(x)\int_0^x f(t)w(t)dt$ defined on $L_p[0,1]$ is obtained.

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Н.Б. Конюхова*, С.В. Курочкин*, В.А. Гани**, В.А. Ленский**
*Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН (ВЦ РАН)
**Государственный научный центр - Институт теоретической и экспериментальной физики (ГНЦ РФ ИТЭФ)
Москва, Россия

Дается краткое представление о результатах [1] *(в переработанном и дополненном виде) по постановке и исследованию сингулярной самосопряженной спектральной задачи для системы трех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, заданных на всей действительной оси. Спектральный параметр (СП) входит в ОДУ нелинейно, порождая операторный квадратичный эрмитов пучок. Задача возникает при анализе устойчивости (в рамках линейной теории возмущений) точного одномерного регулярного решения (заряженного топологического солитона) системы из двух нелинейных волновых уравнений; решение получено в* [2] *для одной модели теории поля из* [3].

Revised and abridged presentation of the results of [1] *on statement and study of a self-adjoint singular spectral problem for a system of three linear second-order ODEs defined on the real axis is given. The spectral parameter enters ODEs in a nonlinear way forming quadratic operator Hermitian pencil. The problem arises in stability analysis (using linear perturbation theory) of the exact one-dimensional regular solution (charged topological soliton) for a system of two nonlinear wave equations; the solution was obtained in* [2] *for a certain field theory model suggested in* [3].

1. Введение. Точное решение системы двух нелинейных волновых уравнений

Построение точных регулярных решений в системах взаимодействующих классических полей и исследование их динамической устойчивости представляют большой интерес в современной нелинейной теории поля (см., например, [4], [5]). В [1] изучается проблема устойчивости одного из таких решений, найденного в [2] для системы двух взаимодействующих скалярных полей – нейтрального поля Хиггса и заряженного линейного поля (модель предложена в [3]). В данной работе дается краткое представление о постановке и аналитико-численном анализе одной сингулярной самосопряженной спектральной задачи [1]. Для постановки этой задачи коротко опишем исходную модель.

В (1+1)-мерном пространстве Минковского рассматривается полевая система, описываемая лагранжианом

$$L = |\partial_t\xi|^2 - |\partial_x\xi|^2 + (\partial_t\phi)^2/2 - (\partial_x\phi)^2/2 - h^2\phi^2|\xi|^2 - m^2(\phi^2 - \nu^2)^2/2. \qquad (1)$$

Здесь ϕ (ξ) – действительное (комплексное) скалярное поле; h, m, ν – вещественные положительные постоянные. Используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$, где c – скорость света в вакууме, $\hbar$ – постоянная Планка. В этой системе единиц нетривиальной остается только размерность массы M, длина и время имеют размерность $1/M$ (см. [4], стр.13). В (1) величины ϕ, ξ, ν безразмерные, $[m] = [h] = M$. В дальнейшем используем новые безразмерные независимые переменные и нормированные искомые функции, полагая

$$\tilde{x} = (h\nu/\sqrt{2})\, x, \quad \tilde{t} = (h\nu/\sqrt{2})\, t, \quad \tilde{\phi} = \phi/\nu, \quad \tilde{\xi} = \xi/\nu \qquad (2)$$

и опуская тильду над буквами.

Система уравнений Лагранжа-Эйлера для лагранжиана (1) в переменных (2) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\phi^2 \xi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 4\xi\xi^*\phi + \frac{4}{\varkappa^2}(\phi^2 - 1)\phi = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $\varkappa$ – положительный безразмерный параметр, $\varkappa^2 = h^2/m^2$ ($*$ здесь и далее означает эрмитово сопряжение).

Ищется решение системы (3), (4), существующее и ограниченное во всем пространстве-времени и удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} \xi(t,x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \phi^2(t,x) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что если $\{\xi, \phi\}$ – решение задачи (3)-(5), то $\{\xi \exp(i\alpha), -\phi\}$ – тоже решение $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

На решениях задачи (3)-(5) сохраняются (не зависят от времени) интегралы движения – энергия E, заряд Q и топологический заряд P:

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + 2\phi^2|\xi|^2 + \frac{1}{\varkappa^2}(\phi^2-1)^2 \right] dx, \tag{6}$$

$$Q = -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\xi^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - \xi \frac{\partial \xi^*}{\partial t} \right) dx, \tag{7}$$

$$P = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx. \tag{8}$$

При этом предполагается, что величины E и Q определены и конечны для начальных данных (конечность P уже следует из условий (5)).

Инвариантность уравнений (3), (4) относительно преобразования $\xi \to \xi \exp(i\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, означает глобальную U(1)-симметрию этих уравнений [4], а заряд (7) называют U(1)-зарядом.

Тривиальное решение $\xi \equiv \phi \equiv 0$ системы (3), (4) называют ложным вакуумом, так как оно обладает ненулевой плотностью энергии ($E = \infty$, $Q = P = 0$); то же относится к бегущим волнам над ложным вакуумом, $\xi = \psi(x \pm t)$, $\phi \equiv 0$, где ψ – произвольная функция. Эти решения не удовлетворяют условиям (5).

Простейшими частными решениями всей задачи (3)-(5) являются истинные вакуумы

$$\xi \equiv 0, \quad \phi_\pm = \pm 1, \tag{9}$$

для которых $E = Q = P = 0$, и доменные $\phi_\pm$-стенки (или топологические солитоны)

$$\xi_w \equiv 0, \quad \phi_{w\pm}(x) = \pm \tanh(\sqrt{2}\, x/\varkappa), \tag{10}$$

для которых

$$E_w = 4\sqrt{2}/(3\varkappa), \quad Q_w = 0, \quad P_{w\pm} = \pm 1. \tag{11}$$

В общем случае вводятся следующие определения.

Определение 1. Топологическим солитоном, или доменной ϕ-стенкой, называем решение задачи (3)-(5), удовлетворяющее по ϕ-компоненте условию

$$[\lim_{x\to\infty} \phi(t,x)][\lim_{x\to-\infty} \phi(t,x)] = -1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{12}$$

(переходной слой между двумя различными истинными вакуумами, так что $P \neq 0$). Нетопологическим солитоном называем решение задачи (3)-(5), удовлетворяющее по ϕ-компоненте условию

$$[\lim_{x\to\infty} \phi(t,x)][\lim_{x\to-\infty} \phi(t,x)] = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{13}$$

и отличное от истинных вакуумов (9) (всплеск над истинным вакуумом, так что $P = 0$).

Определение 2. Топологический (нетопологический) солитон, несущий дополнительно $U(1)$-заряд, называем топологическим (нетопологическим) Q-боллом, или заряженным топологическим (нетопологическим) солитоном.

Условия существования и устойчивости *нетопологических* Q-боллов в модели [3], наряду с [3], обсуждаются в [4], гл.10, и в [2]. Однако явный вид таких Q-боллов не найден. В [2] для системы (3), (4) найдено точное решение типа *топологического* Q-болла, которое (с точностью до инвариантных преобразований) имеет вид

$$\phi_0(t,x) \equiv \phi_0(x) = \tanh x, \tag{14}$$

$$\xi_0(t,x) = \rho(\varkappa^2)\exp(it)/\cosh x, \quad 0 < \varkappa^2 < 2, \quad t,x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Здесь и всюду далее используется обозначение

$$\rho(\varkappa^2) = \sqrt{1/\varkappa^2 - 1/2}, \quad 0 < \varkappa^2 \leq 2. \tag{16}$$

Из (6)-(8) для решения (14), (15) следует:

$$E_0 = 4[4\rho(\varkappa^2) + 1]/3, \quad Q_0 = 4\rho(\varkappa^2), \quad P_0 = 1. \tag{17}$$

При $\varkappa \to \sqrt{2}$ решение (14), (15) переходит в незаряженную ϕ_{w+}-стенку из (10).

Замечание 1. В силу инвариантности уравнений (3), (4) относительно преобразований Лоренца по переменным t, x, решение (14), (15) порождает для задачи (3)-(5) бегущую волну

$$\phi_Q(t,x) = \tanh\left((x \pm vt)/\sqrt{1-v^2}\right),$$

$$\xi_Q(t,x) = \rho(\varkappa^2)\exp\left(i(t \pm vx)/\sqrt{1-v^2}\right)/\cosh\left((x \pm vt)/\sqrt{1-v^2}\right), \quad t,x \in \mathbb{R}$$

(с осцилляциями в ξ-компоненте), если задана начальная скорость $v : 0 < v < 1$.

По поводу физической интерпретации решения (14), (15), имеющего отношение к моделям астрофизики и космологии, см. [1], [2] и цитированную там литературу.

2. Проблема динамической устойчивости решения, постановка спектральной задачи

С точки зрения физических приложений важен сложный вопрос о динамической устойчивости/неустойчивости решения (14), (15). Различные подходы к понятию устойчивости решения в задачах нелинейной физики достаточно подробно обсуждаются в [5]. В частности, решение считается абсолютно энергетически устойчивым (или абсолютно устойчивым по Лагранжу), если оно доставляет абсолютный минимум функционалу энергии. Такими решениями для системы (3), (4) являются истинные вакуумы (9). Но эти решения обладают нулевыми Q- и P-зарядами.

Определение 3. Будем говорить, что решение $\xi(t,x)$, $\phi(t,x)$ системы (3), (4) абсолютно энергетически устойчиво в секторе $\{P; Q\}$, если оно имеет наименьшую энергию среди всех решений с фиксированными значениями зарядов (7), (8).

Тогда решения (10) абсолютно энергетически устойчивы в секторах $\{\pm 1; 0\}$, так как при $\xi \equiv 0$ задача (3)-(5) не имеет других стационарных решений (с точностью до сдвига по оси x в формулах (10)).

Вопрос об абсолютной энергетической устойчивости решения (14), (15) в секторе $\{1; 4\rho(\varkappa^2)\}$ является сложным из-за зависимости составляющей (15) от времени. Наводящим соображением относительно устойчивости этого решения может быть следующее: параметр $\varkappa^2$ входит только в амплитуду (15); при $\varkappa \to \sqrt{2}$ решение (14), (15) переходит в устойчивое решение из (10); при $0 < \varkappa^2 < 2$ появляется $U(1)$-заряд, который обычно только стабилизирует решение (см. [4], гл.10). Кроме того, в [1] показано (на "физическом"уровне строгости), что решение (14), (15) устойчиво относительно возможного его распада на малые нелокализованные колебания (по компоненте ξ) над кинком (10), так как это энергетически невыгодно.

В данной работе мы ограничимся постановкой и математическим исследованием динамической устойчивости решения (14), (15) в рамках линейной теории возмущений (в переработанном и дополненном виде), а также кратким описанием вычислительных экспериментов [1].

Положим $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, $\xi = \xi_0 + \delta\xi$, где $\delta\phi$, $\delta\xi$ – малые отклонения от (14), (15), $\delta\phi(t,x)$ ($\delta\xi(t,x)$) – вещественнозначная (комплекснозначная) функция. В линейном по отклонениям приближении получаем из (3), (4) систему волновых уравнений:

$$\frac{\partial^2\delta\xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\delta\xi}{\partial x^2} + 2\phi_0^2\delta\xi + 4\phi_0\xi_0\delta\phi = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\delta\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\delta\phi}{\partial x^2} + 4\xi_0\xi_0^*\delta\phi + 4\phi_0\Big(\xi_0\delta\xi^* + \xi_0^*\delta\xi\Big) + \frac{4}{\varkappa^2}\Big(3\phi_0^2 - 1\Big)\delta\phi = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Разделим переменные в (18), (19), полагая

$$\delta\xi = [\eta(x)\exp(-i\lambda t) + \chi^*(x)\exp(i\lambda^* t)]\exp(it), \tag{20}$$

$$\delta\phi = V(x)\exp(-i\lambda t) + V^*(x)\exp(i\lambda^* t), \tag{21}$$

и, учитывая сходимость интегралов (6)-(8), потребуем выполнения условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\Psi^*(x)\Psi(x) + \Psi^{*\prime}(x)\Psi'(x)]\,dx < \infty; \tag{22}$$

здесь и далее

$$\Psi(x) = (\eta(x), \chi(x), V(x))^T, \quad \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3, \tag{23}$$

^{T} означает транспонирование. Тогда из (18)-(21) получим для η, χ, V систему ОДУ на $\mathbb{R}$, которая не меняется при заменах (x, η, χ, V) на $(-x, \eta, \chi, -V)$ и на $(-x, -\eta, -\chi, V)$, откуда и из (22) окончательно получаем следующую сингулярную краевую задачу (КЗ) на $\mathbb{R}_+$ с параметром λ:

$$\eta'' = \left(1 + 2\lambda - \lambda^2 - 2/\cosh^2 x\right)\eta + 4\rho(\varkappa^2)\,(\tanh x/\cosh x)\,V, \tag{24}$$

$$\chi'' = \left(1 - 2\lambda - \lambda^2 - 2/\cosh^2 x\right)\chi + 4\rho(\varkappa^2)\,(\tanh x/\cosh x)\,V, \tag{25}$$

$$V'' = \left[8/\varkappa^2 - \lambda^2 - (8 + 2\varkappa^2)/(\varkappa^2\cosh^2 x)\right]V + 4\rho(\varkappa^2)\,(\tanh x/\cosh x)\,(\eta + \chi), \tag{26}$$

$$\eta(0) = \chi(0) = V'(0) = 0 \quad \text{или} \quad \eta'(0) = \chi'(0) = V(0) = 0, \tag{27}$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(\eta(x), \chi(x), V(x)\big) = \lim_{x\to\infty}\big(\eta'(x), \chi'(x), V'(x)\big) = (0, 0, 0). \tag{28}$$

Требуется найти собственные значения (СЗ) параметра λ, при которых сингулярная КЗ (24)-(28) имеет нетривиальные решения – собственные функции (СФ) из $L_2(\mathbb{R}_+)$, отвечающие этим СЗ. В силу (20), (21), для любого невещественного СЗ λ возмущения экспоненциально растут по времени. Тем самым необходимым условием динамической устойчивости решения (14), (15) должно быть требование к СЗ : $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Это условие также является достаточным, но уже только для устойчивости относительно малых возмущений вида (20), (21); если существует непрерывный спектр, то он также должен лежать на вещественной оси комплексной плоскости λ.

Замечание 2. В [6]-[8] исследуется спектральная устойчивость *нетопологических (нейтральных или заряженных) солитонов*, порожденных *отдельными скалярными полями*. Некоторые подходы этих работ используются в данной работе. Однако, для *топологического заряженного солитона в системе двух взаимодействующих скалярных полей* спектральная задача оказывается более сложной, в том числе с бóльшим числом ОДУ, и ее анализ до [1] и данной работы не проводился.

3. Аналитические и численные исследования спектральной задачи

3.1. **Локальный перенос граничных условий из бесконечности и ограничения на спектр.** Сингулярная КЗ (24)-(28) с нелинейным вхождением СП λ, вообще говоря, может иметь комплексные СЗ. Ее нетривиальные решения ищем в классе комплекснозначных функций из $L_2(\mathbb{R}_+)$. Для корректной постановки КЗ по числу граничных условий при больших x необходимо и достаточно, чтобы сингулярная задача Коши (ЗК) на бесконечности (24)-(26), (28) выделяла трехпараметрическое семейство решений.

Используя обозначения (16), (23) и введя дополнительно обозначения

$$p_1(\lambda) = 1 + 2\lambda - \lambda^2, \quad p_2(\lambda) = 1 - 2\lambda - \lambda^2, \quad p_3(\lambda, \varkappa^2) = 8/\varkappa^2 - \lambda^2, \tag{29}$$

сингулярную ЗК на бесконечности (24)-(26), (28) запишем в виде

$$\Psi'' = A(x, \lambda, \varkappa^2)\Psi, \quad x > 0, \tag{30}$$

$$\lim_{x\to\infty} \Psi(x) = \lim_{x\to\infty} \Psi'(x) = 0, \tag{31}$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ есть (3×3)-матрица, $A = A^T$,

$$\begin{gathered} a_{11} = p_1(\lambda) - 2/\cosh^2 x, \quad a_{22} = p_2(\lambda) - 2/\cosh^2 x, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \\ a_{33} = p_3(\lambda, \varkappa^2) - (8 + 2\varkappa^2)/(\varkappa^2\cosh^2 x),\ a_{j3} = a_{3j} = 4\rho(\varkappa^2)\tanh x/\cosh x,\ j = 1, 2, \end{gathered} \tag{32}$$

$$A(\infty, \lambda, \varkappa^2) = \operatorname{diag}\left(p_1(\lambda), p_2(\lambda), p_3(\lambda, \varkappa^2)\right). \tag{33}$$

Система (30) асимптотически эквивалентна предельной системе с постоянными коэффициентами, которая, в силу (33), распадается на три ОДУ второго порядка, так что каждое из этих ОДУ должно обладать однопараметрическим семейством решений из $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда нетрудно убедиться, что справедливо

Предложение 1. Для того, чтобы для любого фиксированного $\varkappa$, $0 < \varkappa^2 \leq 2$, сингулярная ЗК (30), (31) обладала трехпараметрическим семейством решений, принадлежащих $L_2(\mathbb{R}_+)$, небходимо и достаточно выполнение следующих ограничений на СП λ:

$$p_1(\lambda) \notin \mathbb{R}_-, \quad p_2(\lambda) \notin \mathbb{R}_-, \quad p_3(\lambda, \varkappa^2) \notin \mathbb{R}_-, \tag{34}$$

т.е. значения полиномов (29) не должны лежать на неположительной вещественной полуоси комплексной плоскости λ.

Введем обозначения

$$\nu_j(\lambda) = \sqrt{p_j(\lambda)}, \quad j = 1, 2, \quad \nu_3(\lambda, \varkappa^2) = \sqrt{p_3(\lambda, \varkappa^2)}, \tag{35}$$

где при выполнении условий (34) корни берутся с положительной вещественной частью.

Тогда из результатов [9] получаем, что локальный перенос предельных условий (31) из бесконечности осуществляет

Предложение 2. При фиксированном $\varkappa$, $0 < \varkappa^2 \leq 2$, и фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющем требованиям (34), значения решений сингулярной ЗК (30), (31) образуют в фазовом пространстве $\mathbb{C}^6$ системы (30) трехмерное линейное подпространство $\mathbb{C}^3_+$, зависящее от x как от параметра и выделяемое для достаточно больших x ($x \geq x_\infty$) линейным соотношением

$$\mathbb{C}^3_+: \quad \Psi'(x) = \alpha(x, \lambda, \varkappa^2)\Psi(x), \quad x \geq x_\infty. \tag{36}$$

Здесь (3×3)-матрица $\alpha(x, \lambda, \varkappa^2)$ есть решение сингулярной ЗК

$$\alpha' + \alpha^2 - A(x, \lambda, \varkappa^2) = 0, \quad x \geq x_\infty, \tag{37}$$

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x, \lambda, \varkappa^2) = -\sqrt{A(\infty, \lambda, \varkappa^2)} = -\operatorname{diag}\left(\nu_1(\lambda), \nu_2(\lambda), \nu_3(\lambda, \varkappa^2)\right), \tag{38}$$

которое существует и единственно.

Решение ЗК (37), (38) достаточно хорошо аппроксимируется своим предельным значением (38): в силу (32), (33), невязки в (37) для такого приближения экспоненциально убывают по x, и метод последовательных приближений [9] будет давать при больших x экспоненциально малые поправки к (38). Оценки выбора x_∞, при котором функция (38) аппроксимирует точное решение ЗК (37), (38) с заданной погрешностью для всех $x \geq x_\infty$, можно получить, используя, например, подходы [10], [11]. В результате предельные условия (28) следует заменить приближенными условиями в конечной точке $x = x_\infty$:

$$\eta'(x_\infty) \approx -\nu_1(\lambda)\eta(x_\infty), \quad \chi'(x_\infty) \approx -\nu_2(\lambda)\chi(x_\infty), \quad V'(x_\infty) \approx -\nu_3(\lambda, \varkappa^2)V(x_\infty). \tag{39}$$

Из Предложений 1, 2 и вида КЗ (24)-(28) вытекает

Следствие 1. *При фиксированном значении $\varkappa$, $0 < \varkappa^2 \leq 2$, для СЗ и СФ КЗ* (24)-(28) *справедливы утверждения: любое вещественное СЗ λ удовлетворяет неравенствам*

$$-\sqrt{2} + 1 < \lambda < \sqrt{2} - 1; \tag{40}$$

если λ – чисто мнимое СЗ, то $\eta = \chi^*$, а V – вещественная функция; геометрическая кратность каждого СЗ не может превосходить трех, т.е. каждому СЗ λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, может отвечать не более трех линейно независимых СФ из $L_2(\mathbb{R}_+)$; если $\left(\eta, \chi, V, \lambda\right)$ – решение КЗ (24)-(28), *то $\left(\eta^*, \chi^*, V^*, \lambda^*\right)$, $\left(\chi, \eta, V, -\lambda\right)$ и $\left(\chi^*, \eta^*, V^*, -\lambda^*\right)$ – тоже решения.*

Замечание 3. Система ОДУ (24)-(26) обладает непрерывным спектром, лежащим на вещественной оси комплексной плоскости λ на интервалах $(-\infty, -\sqrt{2}+1]$ и $[\sqrt{2}-1, \infty)$. Под СФ непрерывного спектра понимаем нетривиальные решения КЗ (24)-(28) с заменой условий (28) условиями ограниченности решений на бесконечности. Тогда для значений λ из указанных интервалов размерность подпространств ограниченных на бесконечности решений будет больше трех. Более того, на интервалах $[-2\sqrt{2}/\varkappa, -\sqrt{2}+1)$ и $(\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}/\varkappa]$, вообще говоря, дополнительно могут находиться точки дискретного спектра, отвечающие постановке на бесконечности допустимых граничных условий (типа излучения), выделяющих трехпараметрические семейства решений (соответствующие СФ не будут принадлежать $L_2(\mathbb{R}_+)$). Все эти сложные ситуации требуют дополнительного изучения и не обсуждаются нами подробно, так как, во всяком случае, они не влияют на устойчивость решения (14), (15) относительно малых возмущений вида (20), (21). О постановке для систем линейных ОДУ допустимых граничных условий на бесконечности и их переносе в конечную точку см. [12].

Дополним эти утверждения дальнейшими фактами и оценками.

3.2. **Дискретный спектр при $\varkappa^2 = 2$.** В этом случае система (24)-(26) распадается на три ОДУ второго порядка, $\eta'' + \left[2/\cosh^2 x - p_1(\lambda)\right]\eta = 0$, $\chi'' + \left[2/\cosh^2 x - p_2(\lambda)\right]\chi = 0$, $V'' + \left[6/\cosh^2 x - p_3(\lambda, 2)\right] V = 0$, каждое из которых, как показано в [1], приводится к гипергеометрическому уравнению. Это позволяет найти все точки дискретного спектра КЗ (24)- (28) и отвечающие им СФ из $L_2(\mathbb{R}_+)$ (формулы для СФ всюду пишем с точностью до нормирующего множителя):

$$\lambda_1 = 0: \quad \eta \equiv 0, \quad \chi \equiv 0, \quad V = 1/\cosh^2 x; \tag{41}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ и } \lambda_2 = 2: \quad \eta = 1/\cosh x, \quad \chi \equiv 0, \quad V \equiv 0; \tag{42}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ и } \lambda_3 = -2: \quad \eta \equiv 0, \quad \chi = 1/\cosh x, \quad V \equiv 0; \tag{43}$$

$$\lambda_{4,5} = \pm\sqrt{3}: \quad \eta \equiv 0, \quad \chi \equiv 0, \quad V = \tanh x/\cosh x. \tag{44}$$

3.3. **О дискретном спектре при $0 < \varkappa^2 < 2$: точное СЗ $\lambda = 0$, оценки области локализации комплексных СЗ.** При любом $\varkappa$: $0 < \varkappa^2 < 2$, значение $\lambda = \lambda_1 = 0$ остается СЗ задачи (24)-(28), которому отвечают, по крайней мере, две СФ из $L_2(\mathbb{R}_+)$:

$$\lambda_1 = 0: \quad \eta = -\chi = 1/\cosh x, \quad V = 0; \tag{45}$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \eta = \chi = -\rho(\varkappa^2)\tanh x/\cosh x, \quad V = 1/\cosh^2 x. \tag{46}$$

В силу Следствия 1, СЗ КЗ (24)-(28) достаточно искать в области

$$\operatorname{Re}\lambda \geq 0, \quad \operatorname{Im}\lambda \geq 0. \tag{47}$$

Систему (24)-(26), следуя [6]-[8], запишем в операторном виде

$$\lambda^2 I\Psi - 2\lambda D\Psi - H\Psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{48}$$

где операторы I, H, D рассматриваются в пространстве комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых функций Ψ, удовлетворяющих условиям (31), Ψ: $[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}^3$, со скалярным произведением $(\Psi,\Psi) = \int\limits_0^\infty \Psi^*(x)\Psi(x)dx$. Здесь I – единичный оператор, а эрмитовы операторы D и H имеют вид

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad H = \begin{Vmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} \\ 0 & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{Vmatrix}, \tag{49}$$

где

$$H_{11} = H_{22} = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{\cosh^2 x} + 1, \quad H_{33} = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{8}{\varkappa^2} + 2\right)/\cosh^2 x + \frac{8}{\varkappa^2},$$
$$H_{j3} = H_{3j} = 4\rho(\varkappa^2)\tanh x/\cosh x, \quad j = 1, 2. \tag{50}$$

Умножив (48) скалярно на Ψ, при нормировке $(\Psi,\Psi) = 1$ получим:

$$\lambda^2 - 2\lambda\,(\Psi, D\Psi) - (\Psi, H\Psi) = 0, \tag{51}$$

где $(\Psi, D\Psi)$ и $(\Psi, H\Psi)$ – действительные числа. Из (51) следует

$$\lambda = (\Psi, D\Psi) \pm \sqrt{(\Psi, D\Psi)^2 + (\Psi, H\Psi)}, \tag{52}$$

откуда для λ с ненулевой мнимой частью получаем

$$\operatorname{Re}\lambda = (\Psi, D\Psi), \quad \operatorname{Im}\lambda = \sqrt{-(\Psi, D\Psi)^2 - (\Psi, H\Psi)}, \quad |\lambda|^2 = -(\Psi, H\Psi). \tag{53}$$

Используя (49) и (50), из (53) получаем:

$$|\operatorname{Re}\lambda| = |(\Psi, D\Psi)| = \left|\int\limits_0^\infty dx\,(\eta^*\eta - \chi^*\chi)\right| \leq \int\limits_0^\infty dx\,(\eta^*\eta + \chi^*\chi) \leq 1; \tag{54}$$

$$|\operatorname{Im}\lambda| = \sqrt{-(\Psi, D\Psi)^2 - (\Psi, H\Psi)} \leq \sqrt{-(\Psi, H\Psi)} = |\lambda| \leq \sqrt{-\mu_{\min}}\,, \tag{55}$$

где $\mu_{\min}$ – наименьшее СЗ оператора H. Для $\mu_{\min}$ в [1] получена (достаточно грубая) оценка:

$$\mu_{\min}(\varkappa^2) \geq -2\left(1 + \sqrt{2}\rho(\varkappa^2)\right). \tag{56}$$

Суммируя указанные выше факты, получаем

Предложение 3. При любом $\varkappa : 0 < \varkappa^2 \leq 2$, значение $\lambda = 0$ является СЗ КЗ (24)-(28): при $\varkappa^2 = 2$ оно имеет максимальную возможную геометрическую кратность, равную трем, – ему отвечают СФ (41)-(43); при $\varkappa : 0 < \varkappa^2 < 2$, это СЗ имеет геометрическую кратность не менее двух – ему отвечают СФ (45), (46). Вещественные СЗ КЗ (24)-(28) могут лежать только в интервале (40); СЗ с ненулевой мнимой частью могут находиться только в области

$$|\operatorname{Re}\lambda| \leq \min\{1; \sqrt{-\mu_{\min}(\varkappa^2)}\}, \quad |\operatorname{Im}\lambda| \leq \sqrt{-\mu_{\min}(\varkappa^2)}, \tag{57}$$

где для $\mu_{\min}(\varkappa^2)$ справедлива оценка (56).

С учетом (47), осталось ответить на вопрос о (не)существовании СЗ, отличных от $\lambda = 0$ и лежащих в области

$$0 \leq \operatorname{Re}\lambda(\varkappa^2) \leq \min\{1; \sqrt{-\mu_{min}(\varkappa^2)}\}, \quad 0 \leq \operatorname{Im}\lambda(\varkappa^2) \leq \sqrt{-\mu_{min}(\varkappa^2)}. \tag{58}$$

Ответ на этот вопрос дан в [1] только на основании вычислительных экспериментов, которые мы очень коротко опишем.

3.4. **Численное исследование спектральной КЗ** (24)-(28) **и сопутствующей КЗ на отыскание** $\mu_{\min}(\varkappa^2)$**.** Оценка (56) для $\mu_{\min}(\varkappa^2)$ является сильно заниженной. Для уточнения области локализации возможных невещественных СЗ значение $\mu_{\min}(\varkappa^2)$ находилось численно – решалась сопутствующая сингулярная КЗ с параметром μ: система ОДУ (48) при $D = 0$,

$$\mu I\Psi - H\Psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{59}$$

с граничными условиями (27), (28).

Условия (28) в конечной точке $x = x_\infty$ аппроксимируются условиями

$$\eta'(x_\infty) = -\sqrt{1-\mu}\,\eta(x_\infty),\ \chi'(x_\infty) = -\sqrt{1-\mu}\,\chi(x_\infty),\ V'(x_\infty) = -\sqrt{8/\varkappa^2 - \mu}V(x_\infty), \tag{60}$$

(по аналогии с (39) для системы (48)). Из (60), самосопряженности сингулярной КЗ (59), (27), (28) и с учетом Предложения 3 получаем

Предложение 4. При любом фиксированном $\varkappa$, $0 < \varkappa^2 \leq 2$, дискретный спектр сингулярной КЗ (59), (27), (28) (для СФ из $L_2(\mathbb{R}_+)$) может лежать только на полубесконечном интервале $\mu < 1$; при $\varkappa^2 = 2$ эта задача имеет единственное СЗ $\mu = 0$ кратности 3, ему отвечают СФ (41)-(43); при $\varkappa : 0 < \varkappa^2 < 2$, значение $\mu = 0$ является двухкратным СЗ, ему отвечают СФ (45), (46), а $\mu_{\min}(\varkappa^2)$ должно быть отрицательным.

Для отыскания $\mu_{\min}(\varkappa^2)$ при $\varkappa : 0 < \varkappa^2 \leq 2$, численно решаем КЗ (59), (27), (60): при фиксированном $\mu \leq 0$ переносим граничные условия (60) из точки $x = x_\infty$ в точку $x = 0$ и следим за переменой знака результирующего определителя при изменении μ. При этом используем вариант прогонки [13] (с учетом исследований [14] по устойчивому применению методов ортогональной прогонки в сингулярных КЗ). Точный ответ при $\mu = 0$ служит дополнительным контролем правильности и точности вычислений.

Расчеты [1] показали: с уменьшением $\varkappa$ от $\sqrt{2}$ двухкратное СЗ остается в нуле, а однократное СЗ (которое и есть $\mu_{\min}(\varkappa^2)$) движется в область отрицательных значений; аналитическая оценка (56) для $\mu_{\min}(\varkappa^2)$ сильно занижена (например, $\sqrt{-\mu_{\min}(1.44)} \approx 0.45$, тогда как для правой части (56) получаем значение 1.8); при $\varkappa \lesssim 1.23$ значение $\sqrt{-\mu_{\min}(\varkappa^2)}$ превосходит величину $\sqrt{2}-1$ (см. оценки (40) и (55)), что усложняет локализацию СЗ основной КЗ (24)-(28), так как окружность радиуса $\sqrt{-\mu_{\min}(\varkappa^2)}$ начинает пересекать интервалы непрерывного спектра (см. Замечание 3).

Поиск СЗ в области (58) основной спектральной задачи (24)-(27), (39) проводился методом, основанным на обобщении принципа аргумента (о методах локализации точек дискретного спектра с применением принципа аргумента и его модификаций см., например, [15]-[18] и цитированную там литературу) с использованием дифференциальной прогонки [13] (подробнее об устойчивом применении метода [13] в сингулярных КЗ на отыскание СЗ и СФ дискретного спектра см. [14]).

Условия (39) представляются в виде:

$$\varphi(x_\infty, \lambda, \varkappa^2) W(x_\infty, \lambda, \varkappa^2) = 0, \tag{61}$$

где $W = (\eta, \eta', \chi, \chi', V, V')^T$,

$$\varphi(x_\infty, \lambda, \varkappa^2) = \left\| \begin{matrix} \nu_1(\lambda) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2(\lambda) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_3(\lambda, \varkappa^2) & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{62}$$

В результате переноса условия (61) в точку $x = 0$ получается эквивалентное (61) условие в этой точке с (3×6)-матрицей $\varphi(0, \lambda, \varkappa^2)$. Если дополнить эту матрицу до квадратной, приписав к ней снизу матрицу, соответствующую условиям (27), то задача поиска СЗ может быть переформулирована следующим образом: 1) число λ является СЗ $\Longleftrightarrow$ определитель результирующей матрицы равен нулю; 2) геометрическая (т.е. по количеству линейно независимых СФ) кратность СЗ равна дефекту результирующей матрицы; 3) алгебраической кратностью СЗ является его кратность как нуля этого определителя.

Расчеты [1] показали: 1) в вырожденном случае, когда $\varkappa = \sqrt{2}$, СЗ $\lambda = 0$ имеет алгебраическую кратность 4 при геометрической кратности 3 (несовпадение кратностей объясняется не наличием жордановой клетки, что невозможно в силу самосопряженности КЗ, а квадратичным вхождением СП λ в уравнение (26)); 2) при $\varkappa : 0 < \varkappa < \sqrt{2}$, СЗ $\lambda = 0$ по-прежнему имеет алгебраическую кратность 4, т.е. от $\lambda = 0$ не отщепляется никаких, в том числе неустойчивых, СЗ; 3) при $\varkappa : 1.23 \lesssim \varkappa < \sqrt{2}$, пока окружность радиуса $\sqrt{-\mu_{\min}(\varkappa^2)}$ не пересекает интервалы непрерывного спектра, из полученных результатов строго следует, что у КЗ (24)-(27), (39) нет никаких других СЗ.

Заметим, что геометрическая кратность СЗ $\lambda = 0$ при отходе от $\varkappa = \sqrt{2}$ падает с 3 до 2 (вместо СФ (42), (43) остается (45)). Потеря геометрической кратности СЗ при возмущении параметра – характерное явление для квадратичных пучков (в отличие от линейных). По мере приближения $\varkappa$ к нулю КЗ становится все более жесткой. При расчетах с фиксированной (двойной) относительной точностью удалось довести $\varkappa$ до величин порядка 0.05.

Окончательно получаем: *для любого фиксированного* $\varkappa : 0 < \varkappa < \sqrt{2}$, *сингулярная КЗ* (24)-(28) *имеет только одно СЗ* $\lambda = 0$ *геометрической кратности 2 (ему отвечают СФ* (45)*,* (46)*) и алгебраической кратности 4* (с наибольшей строгостью это справедливо для $\varkappa$: $1.23 \lesssim \varkappa < \sqrt{2}$; для меньших значений $\varkappa$ никаких других СЗ в допустимой области (58) их существования также не обнаружено).

В заключение отметим, что проведенные аналитические и численные исследования позволяют сделать вывод о динамической устойчивости решения (14), (15) относительно малых возмущений вида (20), (21) при $0 < \varkappa < \sqrt{2}$ (с наибольшей строгостью это справедливо, по крайней мере, для диапазона $\varkappa$: $1.23 \lesssim \varkappa < \sqrt{2}$). Сложный вопрос об энергетической устойчивости Q-болла (14), (15) в секторе $\{1; 4\rho(\varkappa^2)\}$ остается открытым.

Работа поддержана РФФИ, проект N05-01-00257.

Список литературы

[1] *Гани В. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В., Ленский В. А.* Исследование устойчивости заряженного топологического солитона в системе двух взаимодействующих скалярных полей// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. N11. С.2069-2083.

[2] *Ленский В. А., Гани В. А., Кудрявцев А. Е.* О доменных стенках, несущих U(1)-заряд// Ж. эксперим. и теор. физ. 2001. Т.120. С.778-785.

[3] *Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A.* Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions// Phys. Rev. D. 1976. Vol.13. P.2739-2761.

[4] *Рубаков В. А.* Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[5] *Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.* Многомерные солитоны. М.: Изд-во РУДН, 2001.

[6] *Anderson D. L. T., Derrick G. H.* Stability of time-dependent particlelike solution in nonlinear field theories. I// J. Math. Phys. 1970. Vol.11. No.4. P.1336-1346.

[7] *Anderson D. L. T.* Stability of time-dependent particlelike solution in nonlinear field theories. II// J. Math. Phys. 1971. Vol.12. No.6. P.945-952.

[8] *Белова Т. И., Воронов Н. А., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С.* Области устойчивости одномерных солитонов заряженного скалярного поля// Ядерная физика. 1994. Т.57. N11. С.2105-2112.

[9] *Биргер Е. С., Ляликова (Конюхова) Н. Б.* О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5. N5. С.979-990.

[10] *Биргер Е. С.* Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т.8. N3. С.674-678.

[11] *Китороагэ Д. И., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С.* Метод тригонометрических матриц решения систем гиперрадиальных уравнений Шредингера (в задачах квантовой физики на связанные состояния частиц)// Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

[12] *Конюхова Н. Б.* О допустимых граничных условиях в иррегулярной особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т.23. N4. С.806-824.

[13] *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1. N3. С.542-545.

[14] *Абрамов А. А., Диткин В. В., Конюхова Н. Б. и др.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т.20. N5. С.1155-1172.

[15] *Курочкин С. В.* Метод нахождения собственных значений несамосопряженной краевой задачи// Докл. РАН. 1994. Т.336. N4. С.442-443.

[16] *Абрамов А. А., Юхно Л. В.* Об определении числа собственных значений спектральной задачи// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34. N5. С.776-783.

[17] *Курочкин С. В.* Топологические методы локализации собственных значений краевых задач// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т.35. N8. С.1165-1174.

[18] *Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. В.* Об использовании принципа аргумента в спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38. N1. С.61-67.

Н.Б. Конюхова*, С.В. Курочкин*, В.А. Гани**, В.А. Ленский**; *ВЦ РАН, ул. Вавилова, 40, Москва, 119991, Россия; **ГНЦ РФ ИТЭФ, ул. Большая Черемушкинская, 25, Москва, 117259, Россия

E-mail: nadja@ccas.ru; kuroch@ccas.ru; gani@heron.itep.ru

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Корнев [1]
Саратовский государственный университет
Саратов, Россия

Keywords: интегральный оператор, собственные функции, разложения, абсолютная сходимость.

В статье устанавливается аналог теоремы Саса об абсолютной сходимости тригонометрических рядов для разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменным пределом интегрирования.

В настоящей статье устанавливается аналог теоремы Саса [1, с. 609] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье для разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф) интегрального оператора

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt, \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t, причем

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} A(x,t)|_{t=x} = \delta_{s,n-1}, \quad s = 0,1,\dots,n;$$

$\delta_{s,n-1}$ – символ Кронекера.

Оператор (1) впервые рассматривался в [2]. Он представляет собой простейший вид интегрального оператора, ядро которого имеет разрыв $(n-1)$-ой производной на линии $t = 1-x$. Для такого оператора в [3] установлена равносходимость разложений по с.п.ф. и в обычный тригонометрический ряд Фурье, в [4] установлена базисность по Риссу в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф., а в [5] получен аналог признака Зигмунда абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье на случай рядов по с.п.ф. оператора A.

Введем оператор

$$A_0 f = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt, \quad 0 \le x \le 1,$$

и обозначим через $R_{0\lambda} = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ его резольвенту Фредгольма (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Для определенности рассмотрим случай $n = 4\mu+1$. Далее рассмотрим краевую задачу

$$v^{(n)}(x) - \lambda \mathcal{D} v(x) = BF(x), \tag{2}$$

$$Pv^{(j)}(0) + Qv^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0,1,\dots,n-1, \tag{3}$$

где $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$, $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$, $F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = f(1-x)$, T – знак транспонирования. Тогда $R_{0\lambda} f = v_1(x) + v_2(x)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента России на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы "Университеты России"(проект УР.04.01.041), и гранта РФФИ (проект №03-01-00169).

Положим $\lambda = i\rho^n$, $\rho \in S = \left\{\rho | \arg\rho \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]\right\}$. Через ω'_j обозначим корни n-ой степени из единицы, занумерованные так, чтобы $Re\,\rho\omega'_1 \geq \cdots \geq Re\,\rho\omega'_\nu \geq 0 \geq Re\,\rho\omega'_{\nu+1} \geq \cdots \geq Re\,\rho\omega'_n$, а через ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ обозначим числа $\omega'_j, -\omega'_j$, занумерованные так, что

$$Re\,\rho\omega_1 \geq \cdots \geq Re\,\rho\omega_n \geq 0 \geq Re\,\rho\omega_{n+1} \geq \cdots \geq Re\,\rho\omega_n.$$

Нумерация ω'_j и ω_k зависит от $\arg\rho$ и сохраняется в каждом из секторов $S_j = \left\{\rho | \arg\rho \in \left[\frac{\pi}{2n}(j-1), \frac{\pi}{2n}j\right]\right\}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Как показано в [3], $\Delta(\rho) = \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}(a + b\exp(-2\rho\omega_k) + o(1))\exp\rho\sum\limits_1^n \omega_k$, где $\Delta(\rho)$ – характеристический определитель для (2),(3), a и b – отличные от нуля постоянные, свои в каждом S_j. Удалим из S все нули функций $a + b\exp(-2\rho\omega_n)$ вместе с δ-окрестностями и получившуюся область обозначим $S(\delta)$. Положим

$$g(x,t,\rho) = \begin{pmatrix} g_1(x,t,\rho) & 0 \\ 0 & g_2(x,t,\rho) \end{pmatrix},$$

где

$$g_1(x,t,\rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}}\left\{\varepsilon(x,t)\sum_{k=\nu+1}^{n}\omega'_k \exp\rho\omega'_k(x-t) - \varepsilon(t,x)\sum_{k=1}^{\nu}\omega'_k \exp\rho\omega'_k(x-t)\right\},$$

$$g_2(x,t,\rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}}\left\{-\varepsilon(x,t)\sum_{k=1}^{\nu}\omega'_k \exp(-\rho\omega'_k(x-t)) + \varepsilon(t,x)\sum_{k=\nu+1}^{n}\omega'_k \exp(-\rho\omega'_k(x-t))\right\},$$

где $\varepsilon(x,t) \equiv 1$ при $x \geq t$ и $\varepsilon(x,t) \equiv 0$ при $x < t$.

Через $\sigma(x,\rho)$ обозначим одну из следующих функций $\{\exp\rho\omega_k(x-1)\}_{k=1}^n \cup \{\exp\rho\omega_k x\}_{k=n+1}^{2n}$.

Теорема 1. *В области $S(\delta)$ для решения $v(x,\rho)$ краевой задачи (2),(3) имеет место представление*

$$v(x,\rho) = \int\limits_0^1 G(x,t,\rho)BF(t)dt,$$

где $G(x,t,\rho) = g(x,t,\rho) + \frac{1}{\rho^{n-1}}H(x,t,\rho)$, $H(x,t,\rho)$ – матрица, компоненты которой являются линейными комбинациями всевозможных произведений $\sigma(x,\rho)\sigma(t,\rho)$ с коэффициентами, не зависящими от x и t, являющимися ограниченными функциями ρ.

Введем оператор

$$T'_t f = \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t}T(x,t)f(t)dt,$$

где $T(x,t)$ – ядро оператора $(E - T_1)^{-1} - E$, в котором

$$T_1 f = \int\limits_0^x \frac{\partial^n}{\partial x^n}A(x,t)f(t)dt.$$

Теорема 2. *В $S(\delta)$ при больших $|\rho|$*

$$R_\lambda = R_{0\lambda} + R_{0\lambda}T'_t(E - D^{n-1}SR_{0\lambda}T'_t)^{-1}D^{n-1}SR_{0\lambda},$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$, $D = \frac{d}{dx}$, $Sf = f(1-x)$.

Все выброшенные кружки при определении $S(\delta)$ занумеруем в одну последовательность $\{\gamma_m\}_1^\infty$ по правилу $|\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \cdots$, где ρ_m – центр γ_m. Через Γ_m обозначим образы γ_m в λ-плоскости.

Теорема 3. *Существует натуральное m_0 такое, что для любой $f(x) \in L_2[0,1]$ ряд*

$$\sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\Gamma_m} (R_\lambda - R_{0\lambda}) f \, d\lambda \right|$$

сходится при всех $x \in [0,1]$ и его сумма ограничена.

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$u^{(n)}(x) - \lambda \mathcal{D} u(x) = BF(x), \tag{4}$$

$$u^{(j)}(0) - u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$. Роли ρ_m для этой задачи играют точки $\tau_m = 2mi\omega_n^{-1}\pi$, и мы наряду с прежними ρ_m удалим их из S вместе с δ-окрестностями, а получившуюся область по-прежнему обозначим $S(\delta)$.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) $f(0) = f(1) = 0$;

2) $f(t) = O(t^\alpha)$ при $t \to 0$ и $f(t) = O((1-t)^\alpha)$ при $t \to 1$, $\alpha > 0$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega^{(2)} \left(f, \frac{1}{n}\right) < \infty$, где $\omega^{(2)} \left(f, \frac{1}{n}\right)$ – квадратический модуль непрерывности $f(x)$ при периодическом продолжении.

Тогда сходятся ряды

$$\sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\Gamma_m} (R_{0\lambda} f - u_1(x,\rho) - u_2((x,\rho) d\lambda \right|$$

и

$$\sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\Gamma_m} (u_1(x,\rho) + u_2(x,\rho)) d\lambda \right|$$

($(u_1(x,\rho), u_2(x,\rho))^T$ – решение задачи (4),(5)).

Из теорем 3 и 4 следует основной результат:

Теорема 5. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям 1)-3) предыдущей теоремы, то ряд Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A сходится абсолютно.*

Замечание. Аналогичный результат справедлив и для разложений по с.п.ф. дифференциальных операторов $Ly = y^{(n)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x) y$ с непрерывными коэффициентами и регулярными по Биркгофу краевыми условиями.

Список литературы

[1] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* М.: Физматгиз,1961. – 936с. (Русский).

[2] Хромов А.П. *Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях.* Мат. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 6. – С. 932-949.

[3] Корнев В.В., Хромов А.П. *О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях.* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 10. – С. 33-50. (Русский).

[4] Курдюмов В.П., Хромов А.П. *О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 393. – № 1. – С. 14-17.

[5] Корнев В.В., Хромов А.П. *Об абсолютной сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменным пределом интегрирования* // Тр. матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Матер. VI Казанской межд. летней школы-конференции (Казань, 27 июня – 4 июля 2003). Казань: Изд-во Казан. матем. общества. – 2003. – С. 127-130.

V.V.Kornev *On absolute convergence of the expansions in eigenfunctions of integral operators from a given class*

Keywords: integral operator, eigenfunctions, expansions, absolute convergence.

The paper is concerned with an analog of Szasz theorem about absolute convergence of trigonometric Fourier series for the expansions in eigenfunctions of integral operators with a variable limit of integration.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента России на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы "Университеты России"(проект УР.04.01.041) и гранта РФФИ (проект №03-01-00169).

В.В. Корнев Механико–математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail: `KornevVV@info.sgu.ru`

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыхлов[1]
Саратовский государственный университет
Саратов, Россия

Рассматривается задача об m-кратной полноте ($0 < m \le n$) собственных и присоединенных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с посотоянными коэффициентами в пространстве $L_2[0,1]$. Дается постановка задачи и краткая история вопроса. Формулируются достаточные условия полноты.

Keywords: кратная полнота, собственные и присоединенные функции, пучок обыкновенных дифференциальных операторов, нерегулярный пучок

1. Постановка задачи и краткая история вопроса

Рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0,1]$ дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)y \equiv \sum_{0\le s+k\le n} p_{sk}(x)\lambda^s y^{(k)}, \qquad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями

$$U_j(y,\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $p_s(x,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{s} p_{\nu n-s}(x)\lambda^\nu$, $s=\overline{0,n}$, $p_{sk}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{jk}(\lambda), b_{jk}(\lambda)$ – произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2) будут рассматриваться краевые условия

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1) = 0, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

не содержащие параметра λ.

Многие проблемы современного естествознания приводят к задаче разложения функций в биортогональные ряды Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) несамосопряженного пучка $L(\lambda)$. Напомним некоторые определения.

Определение 1. Число λ_0 называется *собственным значением* (с.з.) пучка $L(\lambda)$, если существует функция $y_0(x) \not\equiv 0$ в области определения $L(\lambda)$ такая, что $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Функция $y_0(x)$ называется *собственной функцией* (с.ф.) пучка $L(\lambda)$, соответствующей с.з. λ.

Определение 2. Пусть λ_0 есть с.з. пучка $L(\lambda)$, а $y_{00}(x)$ — соответствующая с.ф.. Система функций $y_{01}(x), y_{02}(x), \ldots, y_{0l}(x)$ называется *системой функций, присоединенных к с.ф.* $y_{00}(x)$, если эти функции являются решениями следующих задач

$$L(\lambda_0)y_{0q} + \frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_0)}{\partial\lambda}y_{0q-1} + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q L(\lambda_0)}{\partial\lambda^q}y_{00} = 0, \quad q=0,1,\ldots,l.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России"(проект ур.04.01.375).

Здесь $\frac{\partial^k L(\lambda_0)}{\partial\lambda^k}$ обозначает пучок, порожденный дифференциальным выражением $\frac{\partial^k \ell(y,\lambda_0)}{\partial\lambda^k}$ и краевыми условиями $\frac{\partial^k U_j(y,\lambda_0)}{\partial\lambda^k} = 0$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$.

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. пучка $L(\lambda)$. Предполагается, что множество Λ счетно.

Определение 3. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$ и $y_{00}, y_{01}, \ldots, y_{0l}$ есть система с.п.ф., соответствующая с.з. λ_0. Обозначим

$$y_{sq} = \left[\frac{\partial^s}{\partial t^s} e^{\lambda_0 t}\left(y_{0q} + \frac{t}{1!}y_{0q-1} + \cdots + \frac{t^q}{q!}y_{00}\right)\right]_{t=0}, \ s = \overline{0, n-1}, \ q = \overline{0,l}.$$

Для $0 < m \leq n$ система вектор-функций $\tilde{y}_q = (y_{0q}, y_{1q}, \ldots, y_{m-1q})^T$, $q = \overline{0,l}$, называется *производной m-цепочкой, соответствующей системе с.п.ф. $y_{00}, y_{01}, \ldots, y_{0l}$.*

Пусть $Y := \{y_k\}$ есть множество всех с.п.ф. $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 4. Система Y с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной в пространстве* $L_2[0,1]$ $(0 < m \leq n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$.

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $0 < m < n$. Эта задача актуальна только для нерегулярных пучков операторов $L(\lambda)$ (или вырожденных, как их иногда называют) с "плохим"поведением функции Грина при $|\lambda| \to \infty$ (экспоненциальный рост в секторах раствора $\geq \pi$). При "хорошем"поведении функции Грина (например, степенная ограниченность при $|\lambda| \to \infty$ на некоторых лучах) эта задача уже решена.

Основополагающей по этой проблеме является работа М.В.Келдыша [1] 1951 года, в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте с.п.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (1) со специальной главной частью

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями (3). В 1973 году эта теорема была доказана А.П.Хромовым [2] в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения и в 1976 — А.А.Шкаликовым [3] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано А.П.Хромовым [4]. Случай произвольной главной части дифференциального выражения был рассмотрен G.Freiling'ом [5] и С.А.Тихомировым [6] в конце 80-х годов прошлого века.

В работах [7] и [8], относящихся к общему виду (1)–(2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка на некоторых лучах.

Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1), (3), дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, провел А.И.Вагабов в серии своих работ 1981–1987 годов (см. [9, 10]).

Но вплоть до настоящего времени вопрос об n- и m-кратной полноте с.п.ф. до конца не решен даже в случае более простого пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}(x) \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\sum_{s+k\le n-1} \lambda^s (a_{jsk} y^{(k)}(0) + b_{jsk} y^{(k)}(1)) = 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $p_{sk}, a_{jsk}, b_{jsk} \in \mathbb{C}$.

В работах автора [12, 13, 14] был предложен метод, который позволяет исследовать вопрос о полноте с.п.ф. для пучка (4)–(5). В частности, в этих работах был исследован вопрос о полноте с.п.ф. некоторых частных случаев этого пучка. Дальнейшему развитию этого метода, а также новым результатам о полноте с.п.ф.пучка (4)–(5) и посвящена данная статья.

Будем считать далее, что краевые условия (5) нормированны и порядок j-го краевого условия есть $\sigma_j(\le n-1)$, то есть будем рассматривать краевые условия вида

$$U_j^0(y,\lambda) \equiv U_{j0}^0(y,\lambda) + U_{j1}^0(y,\lambda) := \sum_{s+k\le\sigma_j} \lambda^s(\alpha_{jsk} y^{(k)}(0) + \beta_{jsk} y^{(k)}(1)) = 0, j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Суммарный порядок краевых условий (6) обозначим буквой σ, то есть по определению $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$.

Пучок (4), (6) будем обозначать $L_0(\lambda)$.

2. Основные обозначения и определения

Рассмотрим уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$$

попарно различны и отличны от нуля. Очевидно, система функций $y_k(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_k x)$, $k = \overline{1,n}$, является фундаментально системой решений (ф.с.р.) уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \ne 0$.

Введем в рассмотрение следующие вектор–столбцы при $k = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned} H_k(\lambda) &= \left(U_1^0(y_k,\lambda), U_2^0(y_k,\lambda), \ldots, U_n^0(y_k,\lambda)\right)^T, \\ V_k(\lambda) &= \left(U_{10}^0(y_k,\lambda), U_{20}^0(y_k,\lambda), \ldots, U_{n0}^0(y_k,\lambda)\right)^T, \\ W_k(\lambda) &= e^{-\lambda\omega_k}\left(U_{11}^0(y_k,\lambda), U_{21}^0(y_k,\lambda), \ldots, U_{n1}^0(y_k,\lambda)\right)^T. \end{aligned}$$

С использованием этих обозначений характеристический определитель (х.о.) пучка $L_0(\lambda)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det\left(U_j^0(y_k,\lambda)\right)_{j,k=1}^n = |H_1(\lambda) H_2(\lambda) \ldots H_n(\lambda)| = \\ &= \left|V_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1} W_1(\lambda), V_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2} W_2(\lambda), \ldots, V_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n} W_n(\lambda)\right|. \end{aligned} \tag{7}$$

Известно, что отличные от нуля с.з. пучка $L_0(\lambda)$ есть нули $\Delta(\lambda)$.

Положим по аналогии с [8]

$$\chi_{J_k} = \sum_{\alpha\in J_k} \omega_\alpha,$$

где J_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, — произвольный набор из k различных натуральных чисел, изменяющихся от 1 до n. При $k = 0$ положим $\chi_{J_0} = 0$.

В дальнейшем будет использоваться обозначение

$$[\eta]_r = \eta_0 + \frac{\eta_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r}{\lambda^r}, \qquad r \ge 0.$$

Учитывая определение форм $U_j(\cdot,\lambda)$ в (6), чисел χ_{J_k}, вид ф.с.р. $y_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,n}$, и раскрывая х.о. (7), будем иметь

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\sigma}\sum_{J_k}\left[P^{J_k}\right]_{\sigma}e^{\lambda\chi_{J_k}}.$$

Отметим в комплексной плоскости всевозможные точки χ_{J_k} и обозначим через M наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки (может случиться, что M — отрезок). Точки χ_{J_k}, которые оказались на границе многоугольника M, назовем граничными, а точки, лежащие в вершинах M, — угловыми.

Для $r\in\{0,1,\ldots,\sigma\}$ через $(M_{\Delta})_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек χ_{J_k}, для которых $\left[P^{J_k}\right]_r\not\equiv 0$. Ясно, что $(M_{\Delta})_0\subset(M_{\Delta})_1\subset\ldots\subset(M_{\Delta})_{\sigma}\subset M$.

По аналогии с [8] дадим следующие определения.

Определение 5. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *регулярным*, если $(M_{\Delta})_0=M$.

Определение 6. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *почти регулярным*, если $(M_{\Delta})_{\sigma}=M$.

Определение 7. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *слабо нерегулярным* (или *нормальным* по терминологии [8]), если многоугольник $(M_{\Delta})_{\sigma}$ имеет не менее двух точек касания с M, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутреней точки к сторонам M, на которых лежат точки касания (если точка касания — вершина, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $<\pi$. Если M есть отрезок, то пучок $L_0(\lambda)$ называем *слабо нерегулярным*, когда $(M_{\Delta})_{\sigma}=M$.

Из определений следует, что регулярный и почти регулярный пучок является в то же время слабо нерегулярным.

Определение 8. Пучок $L_0(\lambda)$, кторый не удовлетворяет предыдущеиму определению, назовем *сильно нерегулярным*.

Из результатов [8] следует, что если пучок $L_0(\lambda)$ слабо нерегулярен (или, по-другому, нормален), то система его с.п.ф. n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Многоугольник $(M_{\Delta})_{\sigma}$ будем кратко обозначать M_{Δ} и называть характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$.

3. Определение и свойства одного семейства функций

Введем в рассмотрение следующее семейство решений уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)):=\begin{vmatrix} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\Gamma(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \ldots & H_n(\lambda)\end{vmatrix},\tag{8}$$

зависящее от вектор-столбца $\Gamma(\lambda)=(\gamma_1(\lambda),\gamma_2(\lambda),\ldots,\gamma_n(\lambda))^T$, который является параметром. Семейство функций (8) играет важную роль при доказательстве полноты системы с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$. Далее потребуются некоторые свойства этого семейства функций, которые сформулируем в виде лемм.

Лемма 1. *Если вектор–функция $\Gamma_j(\lambda)$, $j=\overline{1,n}$, линейно независимы при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, где Ω — фиксированное подмножество $\mathbb{C}$, то функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j=\overline{1,n}$, также линейно независимы по $x\in[0,1]$ при всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\Lambda\cup\{0\}\cup\Omega)$.*

Доказательство. Будем обозначать для краткости $h_j(x,\lambda):=g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j=\overline{1,n}$. Тогда из (8) следует (аргументы опускаем)

$$h_j(x,\lambda)=|\Gamma_jH_2\ldots H_n|\,y_1(x,\lambda)+|H_1\Gamma_jH_3\ldots H_n|\,y_2(x,\lambda)+\ldots+$$

$$+\left|H_1H_2\ldots H_{n-1}\Gamma_j\right| y_n(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}y_k(x,\lambda),$$

где обозначено

$$\alpha_{jk}\equiv\alpha_{jk}(\lambda):=\left|H_1\ldots H_{k-1}\Gamma_jH_k\ldots H_n\right|. \tag{9}$$

Таким образом,

$$H(x,\lambda)=A(\lambda)Y(x,\lambda),$$

где $H(x,\lambda):=(h_1(x,\lambda),h_2(x,\lambda),\ldots,h_n(x,\lambda))^T$, $Y(x,\lambda):=(y_1(x,\lambda),y_2(x\lambda),\ldots,y_n(x,\lambda))^T$, $A(\lambda):=(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$. Если будет показано, что $\det A(\lambda)\neq 0$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\Lambda\cup\{0\}\cup\Omega)$, то тем самым лемма будет доказана, так как система функций $y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda),\ldots,y_n(x,\lambda)$ линейно независима.

Предположим противное, то есть $\det A(\lambda_0)=0$ при некотором $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus(\Lambda\cup\{0\}\cup\Omega)$. Это означает, что строки матрицы $A(\lambda_0)$ линейно зависимы, то есть существуют числа $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_{j1}(\lambda_0),\quad \sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_{j2}(\lambda_0),\quad \ldots,\quad \sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_{jn}(\lambda_0).$$

С учетом обозначения (9) отсюда получим

$$\begin{cases}\left|\left(\sum_{j=1}^n\beta_j\Gamma_j(\lambda_0)\right)H_2(\lambda_0)H_3(\lambda_0)\ldots H_n(\lambda_0)\right|=0,\\ \left|H_1(\lambda_0)\left(\sum_{j=1}^n\beta_j\Gamma_j(\lambda_0)\right)H_3(\lambda_0)\ldots H_n(\lambda_0)\right|=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left|H_1(\lambda_0)H_2(\lambda_0)\ldots H_{n-1}\left(\sum_{j=1}^n\beta_j\Gamma_j(\lambda_0)\right)\right|=0.\end{cases} \tag{10}$$

Обозначим далее для краткости $B:=\sum_{j=1}^n\beta_j\Gamma_j(\lambda_0)$.

Если определители (10) равны нулю, то их столбцы линейно независимы. Следовательно, для каждого $k=\overline{1,n}$ существуют такие числа $c_{k1},c_{k2},\ldots,c_{kn}$, не все равные нулю, что

$$\begin{cases}c_{11}B+c_{12}H_2+\ldots+c_{1n-1}H_{n-1}+c_{1n}H_n=0,\\ c_{21}H_1+c_{22}B+\ldots+c_{2n-1}H_{n-1}+c_{2n}H_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_{n1}H_1+c_{n2}H_2+\ldots+c_{nn-1}H_{n-1}+c_{nn}B=0.\end{cases} \tag{11}$$

Покажем, что $c_{kk}\neq 0$, $k=\overline{1,n}$. В самом деле, если бы $c_{kk}=0$, $k=\overline{1,n}$, то из k-го равенства (11) получили бы

$$c_{k1}H_1+c_{k2}H_2+\cdots+c_{kk-1}H_{k-1}+c_{kk+1}H_{k+1}+\cdots+c_{kn}H_n=0,$$

причем $c_{k1},c_{k2},\ldots c_{kk-1},c_{kk+1},\ldots,c_{kn}$ не все равны нулю. Следовательно векторы $H_1(\lambda_0),H_2(\lambda_0),\ldots,H_{k-1}(\lambda_0),H_{k+1}(\lambda_0),\ldots,H_n(\lambda_0)$ линейно зависимы. Отсюда следует, что

$$\Delta_0(\lambda_0)=\left|H_1(\lambda_0)H_2(\lambda_0)\ldots H_n(\lambda_0))\right|=0,$$

то есть $\lambda_0\in\Lambda\cup\{0\}$, а это неверно, так как по предположению $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus(\Lambda\cup\{0\}\cup\Omega)$. Таким образом, $c_{kk}\neq 0$, $k=\overline{1,n}$.

Из каждого равенства (11) выразим вектор B. Получим

$$\begin{cases}B=\tilde{c}_{12}H_2+\tilde{c}_{13}H_3\ \ldots+\tilde{c}_{1n}H_n,\\ B=\tilde{c}_{21}H_2+\tilde{c}_{23}H_3\ \ldots+\tilde{c}_{2n}H_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ B=\tilde{c}_{n1}H_2+\tilde{c}_{n2}H_3\ \ldots+\tilde{c}_{nn-1}H_{n-1},\end{cases} \tag{12}$$

где обозначено $\tilde{c}_{kj}=\frac{c_{kj}}{c_{kk}}$, $k\neq j$.

Из (12) следует, что все $\widetilde{c}_{kj}=0$, $k\neq j$. В самом деле, не нарушая общности, можно считать, что $k<j$. Вычтем из k–го равенства (12) j–е равенство. Получим

$$(\tilde{c}_{k1}-\tilde{c}_{j1})H_1+(\tilde{c}_{k2}-\tilde{c}_{j2})H_2+\ldots+(\tilde{c}_{kk-1}-\tilde{c}_{jk-1})H_{k-1}+$$
$$+(-\tilde{c}_{jk})H_k+(\tilde{c}_{kk+1}-\tilde{c}_{jk+1})H_{k+1}+\ldots+(\tilde{c}_{kj-1}-\tilde{c}_{jj-1})H_{j-1}+$$
$$+\tilde{c}_{kj}H_j+(\tilde{c}_{kj+1}-\tilde{c}_{jj+1})H_{j+1}+\ldots+(\tilde{c}_{kn}-\tilde{c}_{jn})H_n=0.$$

Но так как векторы $H_1(\lambda_0),H_2(\lambda_0),\ldots,H_n(\lambda_0)$ линейно независимы (иначе $\Delta(\lambda_0)=0$ и $\lambda_0\in\Lambda\cup 0$, что неверно), то отсюда следует, что $\tilde{c}_{jk}=\tilde{c}_{kj}=0$. Поэтому все $\tilde{c}_{kj}=0$, $k\neq j$.

С учетом этого из (12) получим, что $B=0$, то есть $\sum_{j=1}^{n}\beta_j\Gamma_j(\lambda_0)=0$. Но по условию векторы $\Gamma_j(\lambda)$, $j=\overline{1,n}$, линейно независимы для всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, в частности для $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus(\Lambda\cup 0\cup\Omega)$. Следовательно, $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=0$. Получили противоречие, которое доказывает лемму. □

Следующие две леммы есть переформулировка для случая пучка $L_0(\lambda)$ соответствующих лемм из [13].

Лемма 2. *Для фиксированного j $(1\leq j\leq n)$ х.м. функции $g(x,\lambda,V_j(\lambda))$ при любом $x\in[0,1]$ содержится в выпуклой оболочке многоугольника M_Δ и всех тех точек χ_{J_k}, для которых множество J_k содержит число j.*

Лемма 3. *Для фиксированного j $(1\leq j\leq n)$ х.м. функции $g(x,\lambda,W_j(\lambda))$ при любом $x\in[0,1]$ содержится в выпуклой оболочке многоугольника M_Δ и всех тех точек χ_{J_k}, для которых множество J_k не содержит число j.*

4. Достаточные условия полноты

Будем считать, что вектор–функция $\Gamma(\lambda)$ есть целая аналитическая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Непосредственно можно убедиться, что вектор–столбцы

$$\left(\frac{\partial^k g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}{\partial\lambda^k},\frac{\partial^k(\lambda g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k},\ldots,\frac{\partial^k(\lambda^{m-1}g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu},\tag{13}$$

где $k\in\overline{0,s}$ и $\lambda_\nu\in\Lambda$, являются производными m–цепочками для с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$, соответствующих с.з. λ_ν кратности $s+1$.

Предположим, что система $Y=\{y_k\}$ всех с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$ m–кратно $(0<m\leq n)$ не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется вектор–функция $h(x)=\left(\overline{h_1(x)},\overline{h_2(x)},\ldots,\overline{h_m(x)}\right)^T\in L_2^m[0,1]$, $h\neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m–цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$. В частности h ортогональна вектор–столбцам (13). Из этой ортогональности следует, что с.з. λ_ν, имеющее кратность $s+1$, является нулем кратности не меньше $s+1$ функции

$$H(\lambda,\Gamma(\lambda)):=\int\limits_0^1 g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))h(x,\lambda)\,dx=0,$$

где обозначено $h(x,\lambda):=h_1(x)+\lambda h_2(x)+\ldots+\lambda^{m-1}h_m(x)$. Ясно, что функция $H(\lambda,\Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т. по λ.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\mathcal{H}(\lambda,\Gamma(\lambda)):=\frac{H(\lambda,\Gamma(\lambda))}{\Delta(\lambda)},$$

которая формально имеет полюса в точках $\lambda\in\Lambda$, но, как это было отмечено выше, все эти полюса компенсируются числителем, за исключением случая, когда $\lambda=0$ являются с.з. В этом случае дополнительное предположение об ортогональности вектор–функции $h(x)$

в пространстве $L_2^m[0,1]$ конечному набору вектор–функций из $L_2^m[0,1]$, позволяет сделать вывод о том, что $\mathcal{H}(\lambda,\Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т.

Определение 9. Будем говорить, что вектор–функция $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) (обозначаем $\Gamma(\lambda)\in(\alpha)$), если в λ–плоскости существуют по крайней мере три луча, исходящие из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол меньше π, и на которых функция $\mathcal{H}(\lambda,\Gamma(\lambda))$ имеет не более чем степенной рост.

Если $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, то используя принцип Фрагмена–Линделёфа, получим, что $\mathcal{H}(\lambda,\Gamma(\lambda))\equiv P(\lambda)$, где $P(\lambda)$ есть полином по λ. Требуя дополнительную ортогональность $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору вектор–функций, устанавливаем, что $\mathcal{H}(\lambda,\Gamma(\lambda))\equiv 0$, откуда следует, что $H(\lambda,\Gamma(\lambda))\equiv 0$.

Если имеется несколько вектор–функций $\Gamma_j(\lambda)\in(\alpha)$, $j=\overline{1,r}$, то получим r тождеств

$$H(\lambda,\Gamma(\lambda))\equiv 0,\quad j=\overline{1,r}, \tag{14}$$

при условии, что вектор–функция $h(x)$ ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому вполне конкретному конечному набору вектор–функций. Если набор тождеств (14) достаточно "богат", то из него можно заключить, что

$$h_1(x)=h_2(x)=\ldots=h_m(x)=0,\quad \text{п.в. } x\in[0,1],$$

и тем самым получить противоречие с исходным предположением о том, что $h\neq 0$.

Справедлива следующая лемма (см., например, [10]).

Лемма 4. *Либо система с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$ $n-$кратно полна в $L_2[0,1]$, либо соответствующая система производных n–цепочек $\tilde{y_k}$, построенная по системе с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$, имеет бесконечный дефект в $L_2[0,1]$.*

Используя эту лемму, вышеприведенные рассуждения, а также лемму 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если существуют n линейно независимых ц.ф.э.т. $\Gamma_1(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda)$,…,$\Gamma_n(\lambda)\in(\alpha)$, то система с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n–кратно полна в $L_2[0,1]$.*

Следствие 1. *Если $V_{i_s}(\lambda)\in(\alpha)$, $s=\overline{1,k}$, $W_{j_t}(\lambda)\in(\alpha)$, $t=\overline{1,l}$, $k+l\geq n$ и для всех $\lambda\in\mathbb{C}$ за исключением конечного множества*

$$\operatorname{rank}\left(V_{i_1}(\lambda),V_{i_2}(\lambda)\ldots V_{i_k}(\lambda)W_{j_1}(\lambda)W_{j_2}(\lambda)\ldots W_{j_l}(\lambda)\right)=n,$$

то система с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n–кратно полна в $L_2[0,1]$.

При выяснении того, что $V_i(\lambda)\in(\alpha)$ или $W_j(\lambda)\in(\alpha)$, удобно пользоваться леммами 2 и 3.

Ввиду специфической структуры функции $g(x,\lambda,\Gamma(x))$, определяемой формулой (8), удается доказать, в частности, следующую теорему.

Теорема 2. *Если существуют m пар векторов $\{V_j(\lambda),W_j(\lambda)\}$, таких, что $V_j(\lambda)\in(\alpha)$, $W_j(\lambda)\in(\alpha)$, то имеет место m–кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. пучка $L_0(\lambda)$ с возможным конечным дефектом.*

Имеются простые примеры пучков $L_0(\lambda)$, которые являются сильно нерегулярными (то есть теорема о полноте системы их с.п.ф. в пространстве $L_2[0,2]$ из [8] здесь не работает), но, тем не менее, из сформулированных теорем вытекает кратная полнота в $L_2[0,1]$ систем их с.п.ф.

Список литературы

[1] Келдыш М. В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* //Докл. АН СССР. – 1951. – Том 77. – № 1. – С. 11–14.

[2] Хромов А. П. *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов.* Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск. – 1973. – 242 с.

[3] Шкаликов А. А. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями* // Функц. анализ. – 1976. – Том 10. – № 4. – С. 69–80.

[4] Хромов А.П. *О порождающих функциях вольтерровых операторов* // Матем. сборник. – 1977. – Том 102(144). – № 3. – С. 457–472.

[5] Freiling G. *Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operatorbüschel* // Math. Z. – 1984. – Vol. 188. – N 1. – P. 55-68.

[6] Тихомиров С. А. *Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов. – 1987.

[7] Gasymov M. G., Magerramov A. M. *О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов* //Докл. АН Азерб. ССР. – 1974. – Том 30. – № 12. – С. 9–12.

[8] Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г.Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1983. – № 9. – С. 190–229.

[9] Вагабов А. И. *Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения.* Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Москва. – 1988. – 201 с.

[10] Вагабов А. И. *Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов.* – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. – 1994. – 160 с.

[11] Рыхлов В. С. *О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов* / Изв. вузов. Математика. – 1992. – Том 36. – № 3. – С. 35–44.

[12] Rykhlov V. S. *Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators* (Transactions of the international conference "Algebraic and Topological Methods in Mathematical Physics. 1–14 Sept. 1993. Katziveli. Ukraine) // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 1996. – Vol. 3. – N 3/4. – P. 406–411.

[13] Rykhlov V. S. *On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators* // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. – Simferopol: Simferopol State University. – 1997. – Vol. 7. – P. 70–73.

[14] Рыхлов В. С. *Полнота собственных функций некоторых классов нерегулярных дифференциальных операторов* // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Thirteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2002), Sept. 18-29, 2002, Sevastopol, Laspi. Vol.13. – Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, – 2003. – C. 165–169.

On completeness of eigenfunctions of polynomial bundles of ordinary differential operators with constant coefficients. *A problem of m-fold completeness ($0 < m \leq n$) of the eigen- and associated functions of bundles of the n-th order ordinary differential operators in the space $L_2[0,1]$ is considered. A setting of the problem and a brief historical review are given. Sufficient conditions of completeness are formulated.*

Keywords: completeness, eigen- and associated functions, bundle of ordinary differential operators, nonregular bundle

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России"(проект ур.04.01.375).

В.С. Рыхлов, Механико–математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410026, Россия

E-mail: `RykhlovVS@info.sgu.ru`

ON EIGENVALUES IN THE ESSENTIAL SPECTRUM OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH THE INDEFINITE WEIGHT $\operatorname{sgn} x$

Ilia Karabash
Donetsk National University, Donetsk, Ukraine

Keywords: J-selfadjoint operator, indefinite weight, nonselfadjoint operator, differential operator, eigenvalue, algebraic multiplicity, geometric multiplicity

Eigenvalues in the essential spectrum of a singular indefinite Sturm-Liouville operator are studied. Geometric and algebraic multiplicities are obtained. It is proved that there exists an operator of the form $(\operatorname{sgn} x)(-d^2/dx^2 + q(x))$ *with an eigenvalue of infinite algebraic multiplicity. An abstract formulation of the problem is given.*

Let $L_{sl} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + q(x)$ be a selfadjoint Sturm-Liouville operator in $L^2(\mathbb{R})$. We assume that a potential $q(\cdot)$ is continuous and that the operator L_{sl} is in the limit point case at $-\infty$ and $+\infty$. Let J be the multiplication operator by $\operatorname{sgn} x$ in $L^2(\mathbb{R})$, $(Jf)(x) := (\operatorname{sgn} x) f(x)$.

The problem under consideration is a detailed description of the spectrum of the J-selfadjoint Sturm-Liouville operator

$$A_{sl} := JL_{sl} = (\operatorname{sgn} x)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right). \tag{1}$$

Note that A_{sl} is a nonselfadjoint operator. In fact, the operator A_{sl}^* is defined by the same differential expression although it has another domain

$$\operatorname{dom}(A_{sl}^*) = \{\, y \in L^2(\mathbb{R}) : Jy \in \operatorname{dom}(L_{sl}) \,\} \neq \operatorname{dom}(A_{sl}) = \operatorname{dom}(L_{sl}).$$

The eigenvalue problem for a regular indefinite Sturm-Liouville operator was studied in [10], [18], [16], [17], [2] (see also references in [2]). The asymptotic distribution of eigenvalues of indefinite elliptic problems have been the subject of much investigation; see [3], [8], and references therein. The spectral properties of quasi J-nonnegative (for the definition see [9]) singular or regular differential operators were studied in [6], [5], [9].

A description of the point and absolutely continuous spectrum of a selfadjoint extension of a simple closed symmetric operator was given in [4] in terms of boundary values of the Weyl function. Moreover, some results on the singular continuous spectrum have been obtained in [4] too.

The theory of boundary triples (see, for example, [7]) gives a description of the spectrum $\sigma(A_{sl})$ and the discrete spectrum $\sigma_{disc}(A_{sl})$ in terms of the Weyl function, see formula (14) below. In this paper we consider a question of the existence of eigenvalues in the essential spectrum $\sigma_{ess}(A_{sl})$ of the singular J-selfadjoint Sturm-Liouville operator A_{sl}. Geometric and algebraic multiplicities of eigenvalues are given. It is shown that there exists an operator of form (1) with an eigenvalue of infinite algebraic multiplicity. We give an abstract formulation of the problem. Emphasize that we do not assume that the operator A_{sl} is definitizable. Our method is based on a functional model of symmetric operator [7], [15].

Throughout the paper we use the following notation: the discrete spectrum $\sigma_{disc}(A)$ of an operator A in a Hilbert space H is the set of isolated eigenvalues of finite algebraic multiplicity; the essential spectrum is defined by $\sigma_{ess}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$; $\sigma_p(A)$ stands for the set of eigenvalues; $\rho(A)$ is the resolvent set; the continuous spectrum is defined by

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(A) : \operatorname{ran}(A - \lambda) \neq \overline{\operatorname{ran}(A_\lambda)} = H \ \}.$$

The topological support $\operatorname{supp} d\Sigma$ of a Borel measure $d\Sigma$ on $\mathbb{R}$ is the smallest closed set S such that $d\Sigma(\mathbb{R} \setminus S) = 0$. We denote the indicator function of a set S by $\chi_S(\cdot)$.

1. The functional model for A_{sl}.

Recall a functional model of symmetric operator following [7], [15]. We need only the case of the deficiency indices are (1,1).

Let $\Sigma(t) = \Sigma(t-0)$ be a nondecreasing scalar function such that

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\Sigma(t) < \infty, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} d\Sigma(t) = \infty \ . \tag{2}$$

The operator of multiplication $Q_\Sigma : f(t) \to tf(t)$ is a selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R}, d\Sigma)$. Consider the following restriction of Q_Σ

$$A_\Sigma = Q_\Sigma \upharpoonright \mathrm{dom}\,(A_\Sigma), \qquad \mathrm{dom}\,(A_\Sigma) = \{f \in \mathrm{dom}\,(Q_\Sigma) : \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) d\Sigma(t) = 0\}.$$

Then A_Σ is a simple densely defined symmetric operator in $L^2(\mathbb{R}, d\Sigma)$ with deficiency indices (1,1). The adjoint operator A_Σ^* has the form

$$\mathrm{dom}\,(A_\Sigma^*) = \{f = f_Q + t(t^2+1)^{-1}h \ : \ f_Q \in \mathrm{dom}\,(Q_\Sigma),\ h \in \mathbb{C}\}, \quad A_\Sigma^* f = t f_Q - (t^2+1)^{-1} h.$$

Let C be a real constant. Define two unbounded linear functionals Γ_0^Σ, $\Gamma_1^{\Sigma,C}$ in $L^2(\mathbb{R}, d\Sigma)$

$$\Gamma_0^\Sigma f = h, \qquad \Gamma_1^{\Sigma,C} f = Ch + \int\limits_{\mathbb{R}} f_Q(t) d\Sigma(t), \tag{3}$$

$$\text{where} \qquad f = f_Q + t(t^2+1)^{-1}h \in \mathrm{dom}\,(A_\Sigma^*), \qquad f_Q \in \mathrm{dom}\,(Q_\Sigma), \qquad h \in \mathbb{C}.$$

Then $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^\Sigma, \Gamma_1^{\Sigma,C}\}$ is a boundary triple for A_Σ^*. The function

$$M_{\Sigma,C}(\lambda) := C + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}\, d\Sigma,$$

is the Weyl function of a pair $\{A_\Sigma, Q_\Sigma\}$ (see [7], [15]).

Let Σ_+, Σ_- be nondecreasing scalar functions satisfying (2). Let C_+, C_- be real constants. Consider the operator $\widehat{A} = \widehat{A}\ \{\Sigma_+, C_+, \Sigma_-, C_-\}$ in $L^2(d\Sigma_+) \oplus L^2(d\Sigma_-)$ defined by

$$\widehat{A}\ \{\Sigma_+, C_+, \Sigma_-, C_-\} = A_{\Sigma_+}^* \oplus A_{\Sigma_-}^* \upharpoonright \mathrm{dom}\,(\widehat{A}), \tag{4}$$

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{A}) = \{\ f = f_+ + f_- \ : \ f_\pm \in \mathrm{dom}\,(A_{\Sigma_\pm}^*),\ \Gamma_0^{\Sigma_+} f_+ = \Gamma_0^{\Sigma_-} f_-,\ \Gamma_1^{\Sigma_+,C_+} f_+ = \Gamma_1^{\Sigma_-,C_-} f_-\ \}.$$

Let J be an signature operator in a Hilbert space H, $J = J^* = J^{-1}$. Then $J = P_+ - P_-$, where $P_\pm$ is the orthogonal projection on $\ker(J \mp I)$. Let A be a J-selfadjoint operator in H. Put $A_{min} := A \cap A^*$, $A_{min}^\pm := A \upharpoonright \mathrm{dom}\,(A) \cap P_\pm H$. Then A_{min} and $A_{min}^\pm$ are symmetric operators and $A_{min} = A_{min}^+ \oplus A_{min}^-$. Note that the domains of A_{min}, $A_{min}^\pm$ may be nondense in H, $P_\pm H$ respectively.

Proposition 1. Assume that A_{min}^+, A_{min}^- are simple densely defined symmetric operators in P_+H, P_-H, respectively, and the deficiency indices of A_{min}^+, A_{min}^- are (1,1). Then there exist nondecreasing scalar functions Σ_+, Σ_- satisfying (2) and real constants C_+, C_- such that the J-selfadjoint operator A is unitary equivalent to the operator $\widehat{A}\ \{\Sigma_+, C_+, \Sigma_-, C_-\}$.

Let us define the Weil functions $M_{sl+}(\lambda)$ and $M_{sl-}(\lambda)$ for the Neumann problem associated with differential expression (1) on $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}_-$ respectively. Let $s_\pm(x,\lambda)$, $c_\pm(x,\lambda)$ be the solutions of the equation $\pm(-y''(x) + q(x)y(x)) = \lambda y(x)$ subject to boundary conditions

$$s_\pm(\pm 0, \lambda) = \frac{d}{dx} c_\pm(\pm 0, \lambda) = 0, \qquad \frac{d}{dx} s_\pm(\pm 0, \lambda) = c_\pm(\pm 0, \lambda) = 1.$$

Then $M_{sl\pm}(\lambda)$ is defined by the inclusion

$$s_\pm(\cdot,\lambda) - M_{sl\pm}(\lambda)\, c_\pm(\cdot,\lambda) \ \in \ L^2(\mathbb{R}_\pm), \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{5}$$

The function $M_{sl\pm}(\lambda)$ is a R-function; i.e., $M_{sl\pm}(\lambda)$ is holomorphic in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $M_{sl\pm}(\overline{\lambda}) = \overline{M_{sl\pm}(\lambda)}$ and $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im} M_{sl\pm}(\lambda) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Moreover, $M_{sl\pm}(\lambda)$ admit the following representation

$$M_{sl\pm} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\Sigma_{sl\pm}(t)}{t-\lambda}, \tag{6}$$

where $\Sigma_{sl\pm}(t) = \Sigma_{sl\pm}(t-0)$ is a nondecreasing scalar function such that $\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{-1} d\Sigma_{sl\pm}(t)$.

The function $M_{sl\pm}(\lambda)$ has the asymptotics (see, for example, [14])

$$M_{sl\pm}(\lambda) = \pm\frac{i}{\sqrt{\pm\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \left(\lambda\to\infty,\ 0<\delta<\arg\lambda<\pi-\delta\right). \tag{7}$$

Proposition 2. The operator A_{sl} is unitary equivalent to the operator $\widehat{A}\{\Sigma_{sl+}, C_{sl+}, \Sigma_{sl-}, C_{sl-}\}$ where $C_{sl\pm} := \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{t}{1+t^2} d\Sigma_{sl\pm}$.

Note that (6) gives a holomorphic continuation of $M_{sl\pm}(\lambda)$ to $\mathbb{C}\setminus \operatorname{supp} d\Sigma_{sl\pm}$ $(= \rho(Q_{\Sigma_{sl\pm}}))$ and $M_{sl\pm}(\lambda) = M_{\Sigma_{sl\pm}, C_{sl\pm}}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{supp} d\Sigma_{sl\pm}$.

2. The point and essential spectra of $\widehat{A}$.

To classify eigenvalues of A_Σ^* we introduce the following mutually disjoint sets:

$$\mathfrak{A}_0(\Sigma) = \left\{ \lambda\in\sigma_c(Q_\Sigma) \ : \ \int\limits_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^{-2} d\Sigma(t) = \infty \right\},$$

$$\mathfrak{A}_r(\Sigma) = \left\{ \lambda\notin\sigma_p(Q) \ : \ \int\limits_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^{-2} d\Sigma(t) < \infty \right\}, \qquad \mathfrak{A}_p(\Sigma) = \sigma_p(Q_\Sigma).$$

Observe that $\mathbb{C} = \mathfrak{A}_0(\Sigma)\cup\mathfrak{A}_r(\Sigma)\cup\mathfrak{A}_p(\Sigma)$ and

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0(\Sigma) &= \{\lambda\in\mathbb{C} \ : \ \ker(A_\Sigma^*-\lambda) = \{0\}\ \}, \\
\mathfrak{A}_r(\Sigma) &= \left\{\lambda\in\mathbb{C}: \ \ker(A_\Sigma^*-\lambda) = \{c(t-\lambda)^{-1},\ c\in\mathbb{C}\}\right\}, \\
\mathfrak{A}_p(\Sigma) &= \left\{\lambda\in\mathbb{C} \ : \ \ker(A_\Sigma^*-\lambda) = \{c\chi_{\{\lambda\}}(t),\ c\in\mathbb{C}\}\right\}.
\end{aligned}$$

The main result is the following description of the point spectrum of $\widehat{A}\{\Sigma_+, C_+, \Sigma_-, C_-\}$. For the sake of simplicity, assume that $C_\pm = \int_{\mathbb{R}} t(1+t^2)^{-1} d\Sigma_\pm$.

Theorem 1. *Let $\widehat{A} = \widehat{A}\{\Sigma_+, C_+, \Sigma_-, C_-\}$ with $C_\pm = \int_{\mathbb{R}} t(1+t^2)^{-1} d\Sigma_\pm$.*

1: *If $\lambda\in\mathfrak{A}_0(\Sigma_+)\cup\mathfrak{A}_0(\Sigma_-)$ then $\lambda\notin\sigma_p(\widehat{A})$.*

2: *If $\lambda\in\mathfrak{A}_p(\Sigma_+)\cap\mathfrak{A}_p(\Sigma_-)$ then*

- **i:** *λ is an eigenvalue of $\widehat{A}$; the geometric multiplicity of λ equals 1;*
- **ii:** *the eigenvalue λ is simple (i.e., the algebraic and geometric multiplicities are equal one) iff one of the following conditions is not fulfilled:*

$$\Sigma_-(\lambda+0) - \Sigma_-(\lambda) = \Sigma_+(\lambda+0) - \Sigma_+(\lambda), \tag{8}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{|t-\lambda|^2}\, d\Sigma_+(t) < \infty, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{|t-\lambda|^2}\, d\Sigma_-(t) < \infty; \tag{10}$$

iii: *if conditions* (8), (9) *and* (10) *hold true then the algebraic multiplicity of* λ *equals the greatest number* k *(*$2 \le k \le \infty$*) such that*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{|t-\lambda|^{2j}}\, d\Sigma_-(t) < \infty, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{|t-\lambda|^{2j}}\, d\Sigma_+(t) < \infty, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{(t-\lambda)^{j-1}}\, d\Sigma_-(t) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{(t-\lambda)^{j-1}}\, d\Sigma_+(t). \tag{12}$$

for all $j \in \mathbb{N} \;:\; 2 \le j \le k-1.$

3: *Assume that* $\lambda \in \mathfrak{A}_r(\Sigma_+) \cap \mathfrak{A}_r(\Sigma_+)$ *Then* $\lambda \in \sigma_p(\widehat{A})$ *iff*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda} d\Sigma_+(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda} d\Sigma_-(t)\ . \tag{13}$$

If (13) *holds true then the geometric multiplicity of* λ *is one and the algebraic multiplicity is the greatest number* k *(*$k \in \mathbb{N} \cup \infty$*) such that*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{|t-\lambda|^{2j}}\, d\Sigma_-(t) < \infty, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{|t-\lambda|^{2j}}\, d\Sigma_+(t) < \infty,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{(t-\lambda)^{j}}\, d\Sigma_-(t) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \frac{1}{(t-\lambda)^{j}}\, d\Sigma_+(t).$$

for all $j \in \mathbb{N} \;:\; 1 \le j \le k.$

4: *If* $\lambda \in \mathfrak{A}_p(\Sigma_+) \cap \mathfrak{A}_r(\Sigma_-)$ *or* $\lambda \in \mathfrak{A}_p(\Sigma_-) \cap \mathfrak{A}_r(\Sigma_+)$ *then* $\lambda \notin \sigma_p(\widehat{A})$*.*

It follows from [7, Proposition 1.6] that

$$\sigma(\widehat{A}) \cap \rho(Q_{\Sigma_+} \oplus Q_{\Sigma_-}) = \{\lambda \in \rho(Q_{\Sigma_+}) \cap \rho(Q_{\Sigma_-}) \;:\; M_{\Sigma_+,C_+}(\lambda) = M_{\Sigma_-,C_-}(\lambda)\} \subset \sigma_p(\widehat{A}). \tag{14}$$

It is easy to see that (14) and Theorem 1 yield the following description of the essential spectrum (cf. [1, p. 106, Theorem 1]):

Proposition 3. If $M_{\Sigma_+,C_+}(\lambda) \not\equiv M_{\Sigma_-,C_-}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, then $\sigma_{ess}(\widehat{A}) = \sigma_{ess}(Q_{\Sigma_+}) \cup \sigma_{ess}(Q_{\Sigma_-})$.

If $M_{\Sigma_+,C_+}(\lambda) \equiv M_{\Sigma_-,C_-}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, then $\sigma_{ess}(\widehat{A}) = \mathbb{C}$. Moreover, in this case every point $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \big(\sigma_{ess}(Q_{\Sigma_+}) \cup \sigma_{ess}(Q_{\Sigma_-})\big)$ is an eigenvalue of $\widehat{A}$ of infinite algebraic multiplicity.

3. Applications to Sturm-Liouville operators.

Recall some facts on the spectrum of a J-selfadjoint operator. If A is a definitizable J-selfadjoint operator then :

1: the nonreal spectrum consists of a finite number of pairs λ, $\overline{\lambda}$;

2: each eigenvalue of A has finite algebraic multiplicity.

Besides the symmetry condition $\sigma(A) = \sigma(A)^*$ the spectrum of a nondefinizable J-selfadjoint operator can be fairly arbitrary (see [13]). Another example was given in [2].

Example 1. Consider the operator

$$A_1 y = -y'', \quad \operatorname{dom}(A_1) = \{y \in W_2^2(-1,0) \oplus W_2^2(0,1) \;:\; y(-0) = y(+0),\ y'(-0) = -y'(+0)\}$$

in $L^2(-1,1)$. The operator A_1 is J-selfadjoint with J given by $Jf(x) = (\operatorname{sgn} x) f(x))$. It was observed in [2] that every $\lambda \in \mathbb{C}$ is a nonsimple eigenvalue of A_1. Theorem 1 shows that every eigenvalue λ of A_1 has infinite algebraic multiplicity (the geometric multiplicity of λ equals 1).

The operator A_{sl} can be nondefinitizable. The following criterion is a consequence of the definitizability condition given by P. Jonas and H. Langer [11] (see also [13, p. 11, assertion (d)]).

Proposition 4. The operator A_{sl} is definitizable iff the sets $\operatorname{supp} d\Sigma_{sl+}$ and $\operatorname{supp} d\Sigma_{sl-}$ are separable by a finite number of points, i.e., there exists a finite ordered set $\{\alpha_j\}_{j=1}^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$-\infty = \alpha_0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_{2n-1} < \alpha_{2n} = +\infty,$$

such that

$$\operatorname{supp} d\Sigma_- \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} [\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}], \qquad \operatorname{supp} d\Sigma_+ \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} [\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}].$$

Since $M_{sl+}(\lambda) \not\equiv M_{sl-}(\lambda)$ (see asymptotics (7)), Proposition 3, formula (14) and Theorem 1 imply:

1: $\sigma_{ess}(A_{sl}) = \sigma_{ess}(Q_{\Sigma_{sl+}}) \cup \sigma_{ess}(Q_{\Sigma_{sl-}})$;

2: $\sigma_{disc}(A_{sl}) = \Big(\sigma_{disc}(Q_{\Sigma_{sl+}}) \cap \sigma_{disc}(Q_{\Sigma_{sl-}})\Big) \ \cup \ \{\lambda \in \rho(Q_{\Sigma_{sl+}}) \cap \rho(Q_{\Sigma_{sl-}}) \ : \ M_{sl+}(\lambda) = M_{sl-}(\lambda)\}$;

3: the geometric multiplicity equals one for all eigenvalues of A_{sl}.

4: if $\lambda_0 \in \Big(\sigma_{disc}(Q_{\Sigma_{sl+}}) \cap \sigma_{disc}(Q_{\Sigma_{sl-}})\Big)$ then the algebraic multiplicity of λ_0 is equal to the multiplicity of λ_0 as zero of the holomorphic function $\dfrac{1}{M_{sl+}(\lambda)} - \dfrac{1}{M_{sl-}(\lambda)}$;

5: if $\lambda_0 \in \rho(Q_{\Sigma_{sl+}}) \cap \rho(Q_{\Sigma_{sl-}})$ then the algebraic multiplicity of λ_0 is equal to the multiplicity of λ_0 as zero of the holomorphic function $M_{sl+}(\lambda) - M_{sl-}(\lambda)$.

The following theorem completes some results from [12].

Theorem 2. *Let $L_{sl} = -\frac{d^2}{dx^2} + q$ be a Sturm-Liouville operator with a finite-zone potential (see, for example,* [14]*). Then*

1: *the operator $A_{sl} = (\operatorname{sgn} x)(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x))$ is definitizable iff the interiors of the spectrums $\sigma(L)$ and $\sigma(-L)$ are disjoint;*

2: *the nonreal spectrum of A_{sl} consists of a finite number of eigenvalues;*

3: *eigenvalues of A_{sl} are isolated and have finite algebraic multiplicity.*

Theorem 3. *There exists a potential q such that the operator $A_{sl} = (\operatorname{sgn} x)(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x))$ has an eigenvalue of infinite algebraic multiplicity.*

The construction of an example in Theorem 3 is based on Theorem 1 and some results concerning the Hamburger moment problem.

The author express his gratitude to M. M. Malamud and C. Trunk for numerous useful discussions.

References

[1] N. I. Achieser, I. M. Glasmann, *Theory of linear operators in Hilbert space. V. II*, Visha skola, Kharkov, 1978 (Russian).

[2] W. Allegretto, A. B. Mingarelli, *Boundary problems of the second order with an indefinite weight-function* // J. reine angew. Math.—1989.—V. 398. — P.1–24.

[3] M. S. Birman, M. Z. Solomjak, *Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of elliptic equations* // Siberian Math. J.—1979.—V. 20.— P.1–15.

[4] J. F. Brasche, M. M. Malamud, H. Neidhardt, *Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions* // Integral Equations and Operator Theory —2002.—V. 43, no. 3.—P.264–289.

[5] B Ćurgus, H. Langer, *A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function* // J. Differential Equations—1989.—V. 79.—P.31–61.

[6] K. Daho, H. Langer, *Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function* // Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A—1977.—V. 78.— P.161–191.

[7] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem*, Analiz-3, Itogi nauki i tehn. Ser. Sovrem. mat. i eё pril., V. 5, VINITI, Moscow, 1993 (Russian); English translation: J. Math. Sc.—1995.—V. 73, no. 2.—P.141–242.

[8] J. Fleckinger, M. L. Lapidus, *Remainder estimates for the asymptotics of elliptic eigenvalue problems with indefinite weights* // Arch. Rational Mech. Anal.—1987.—V. 98, no. 4.— P.329–356.

[9] A. Fleige, *Spectral theory of indefinite Krein-Feller differential operators*, Mathematical Research 98, Akademie Verlag, Berlin 1996.

[10] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Chelsea, New York, 1953.

[11] P. Jonas, H. Langer, *Compact perturbations of definitizable operators* // J. Operator Theory.— 1979.— V. 2.—P.63–77.

[12] I.M. Karabash, M.M. Malamud, *On similarity of J-selfadjoint Sturm-Liouville operators with finite-gap potential to selfadjoint ones* // Dokl. RAN.—2004.—V. 395, no. 3.—P.303–307. (Russian)

[13] H. Langer, *Spectral functions of definitizable operators in Krein space* // Lecture Notes in Mathematics.—1982.—V. 948.—P.1–46.

[14] B. M. Levitan, *The inverse Sturm-Liouville problems*, Nauka, Moscow, 1984 (Russian).

[15] M. M. Malamud, S. M. Malamud, *Spectral theory of operator measures in Hilbert spaces* // Algebra i Analiz—2003. —V. 15, no. 3.—P.1–77. (Russian); English translation: St. Petersburg Math. J.—2003.—V. 15, no. 3.—P.1–53.

[16] A. B. Mingarelli, *Indefinite Sturm-Liouville problems* // Lecture Notes in Math.—1982.—V. 964. — P.519–528.

[17] A. B. Mingarelli, *On the existence of nonsimple real eigenvalues for general Sturm-Liouville problems* // Proc. Amer. Math. Soc.—1983.—V. 89, no. 3.—P.457–460.

[18] R. G. D. Richardson, *Contributions to the study of oscillation properties of the solutions of linear differential equations of the second order* // Amer. J. Math.—1918.—V. 40, —P.283–316.

I. Karabash, Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaya str. 24, 83055 Donetsk, Ukraine *E-mail:* karabashi@yahoo.com

SIMILARITY OF SOME DIFFERENTIAL OPERATORS TO SELF–ADJOINT OPERATORS

A. S. Kostenko

Keywords: Krein string, J–self–adjoint operators, similarity problem, boundary triplets, Weyl functions

Operators of the form $\frac{\operatorname{sgn} x}{\rho(x)}\frac{d^2}{dx^2}$ are studied. For the function $\rho(\cdot)$ of a special type obtained a Weyl function of the corresponding symmetric operator. It allows us to describe spectral properties for a such type differential operators.

introduction. Let A be a self–adjoint differential operator and let $r(\cdot)$ be an indefinite weight. In numerous papers the Riesz basis property of eigenfunctions of the weighted spectral problem

$$(Ay)(x) = \lambda r(x)y(x),$$

on a finite interval has been investigated in connection with some mechanical and physical problems (see [2, 18] and references therein). For operators with continuous spectrum similar problems are of interest too. Namely, in this case one can interested in similarity of the corresponding nonselfadjoint operator either to a normal or to a self–adjoint one.

More precisely, let us consider in $L^2(\mathbb{R};\ |x|^\alpha)$ the model operator

$$L = -\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha}\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \operatorname{dom}(L) = \{f \in L^2(\mathbb{R};\ |x|^\alpha):\ f,\ f' \in W^1_{1,\ loc}(\mathbb{R}),\ Lf \in L^2(\mathbb{R};\ |x|^\alpha)\}. \tag{1}$$

The operator L has been investigated by Ćurgus and Najman [3] ($\alpha = 0$) and by Fleige and Najman [8] ($\alpha > -1$). Using Krein – Langer theory of definitizable operators in Krein spaces they proved similarity to a self–adjoint operator. Different proofs of these facts have been proposed in [7, 9, 10, 11, 12].

In recent works of Faddeev and Shterenberg [6] and Karabash and Malamud [12] the operator

$$L := \operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right), \tag{2}$$

with nonconstant potential $q(\cdot)$ has been investigated. More precisely, necessary and sufficient conditions for operator (2) to be similar to a self–adjoint one have been obtained in [6](the case of decaying potential) and in [12] (the case of decaying and finite zone potential $q(\cdot)$).

The criterion of similarity to a self–adjoint operator for the operators of the form

$$L = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta\right), \qquad c \in \mathbb{C}, \quad \alpha > -1,$$

(here δ is the Dirac delta) was obtained by Karabash and Kostenko in [11, 13].

Note that the characteristic function $W_L(\cdot)$ of the operator L as well as the corresponding J-form $J - W_L^* J W_L$ is unbounded in $\mathbb{C}_+$. Therefore known sufficient conditions of similarity to a self–adjoint operator cannot be applied here (see Remark 2).

1. Let $L^2(\mathbb{R}_\pm;\ |x|^{\alpha_\pm})$ denote the Hilbert function spaces of equivalence classes of Lebesgue measurable functions such that $\int_{\mathbb{R}_\pm} |f(t)|^2 |t|^{\alpha_\pm} dt < \infty$, ($\alpha_\pm > -1$); the inner-product is defined by

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} f(t)\overline{g(t)}|t|^{\alpha_\pm} dt, \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}_\pm;\ |x|^{\alpha_\pm})).$$

We put $L^2(\mathbb{R};\rho) := L^2(\mathbb{R}_-;|x|^{\alpha_-}) \oplus L^2(\mathbb{R}_+;|x|^{\alpha_+})$; the function $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ is defined by

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha_+}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x|^{\alpha_-}, & x < 0 \end{cases}, \qquad \alpha_\pm > -1. \tag{3}$$

Consider in $L^2(\mathbb{R};\ \rho)$ the operator

$$L = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\rho(x)}\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \operatorname{dom}(L) = \{f \in L^2(\mathbb{R};\ \rho):\ f,\ f' \in W^1_{1,\ loc}(\mathbb{R}),\ Lf \in L^2(\mathbb{R};\ \rho)\}. \quad (4)$$

It is obvious that L is a nonselfadjoint operator because $\operatorname{dom}(L^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R};\ \rho):\ (Jf)(x) := \operatorname{sgn} x \cdot f(x) \in \operatorname{dom}(L)\} \neq \operatorname{dom}(L)$.

Note that the restriction $L_{\min}$ of the operator L

$$L_{\min} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\rho(x)}\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \operatorname{dom}(L_{\min}) = \{f \in \operatorname{dom}(L):\ f(0) = f'(0) = 0\}, \quad (5)$$

is a closed symmetric operator. Hence L is a proper extension of $L_{\min}$, that is, $L_{\min} \subset L \subset L^*_{\min}$ (see [1]).

The main purpose of the paper is to investigate spectral properties of the operator L of the form (3)-(4). Our approach is based on the Naboko–Malamud resolvent criterion ([15, 17]) and on the concept of boundary triplets and the corresponding Weyl functions ([4, 5]).

2. At the beginning we consider the operator $L_+ := P_+ \cdot L_{\min}$ (P_+ is the ortogonal projection from $L^2(\mathbb{R};\rho)$ onto $L^2(\mathbb{R}_+;|x|^{\alpha_+})$. This is the minimal Krein–Feller differential operator in the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}_+;\ |x|^{\alpha_+})$ corresponding to the string S with the mass distribution $m(x)$,

$$L_+ := -\frac{d^2}{dm(x)dx}, \qquad \operatorname{dom}(L_+) = P_+(\operatorname{dom}(L_{\min}));$$
$$m(x) = x^{1+\alpha_+}/(1+\alpha_+), \qquad \alpha_+ > -1. \quad (6)$$

According to [14] L_+ is a simple closed symmetric operator with deficiency indices $n_\pm(L_+) = 1$ (because $\int\limits_0^{+\infty} t^2 dm(t) = +\infty$).

Let us denote by $z^{1/(2+\alpha)},\ z \in \mathbb{C}$, the branch of the complex root with cut along the negative semiaxis $\mathbb{R}_-$ such that $(-1+i0)^{1/(2+\alpha)} = e^{i\pi/(2+\alpha)}$.

Theorem 1 ([13]). *A triplet $\Pi_+ = \{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$, where $\Gamma_j^+ : \operatorname{dom}(L_+^*) \to \mathbb{C}$ and*

$$\Gamma_1^+ f = f(0), \qquad \Gamma_0^+ f = -f'(0), \quad (7)$$

forms a boundary triplet for the adjoint operator L_+^* of L_+.

The corresponding Weyl function $M_+(\cdot)$ is

$$M_+(\lambda) = \Gamma_{\alpha_+}(\lambda) := \frac{C_{\alpha_+}}{(-\lambda)^{1/(2+\alpha_+)}}, \qquad C_{\alpha_+} > 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

The general spectral function of the string S is

$$\tau(x) = \tau_+(x) := C_{\alpha_+} \cdot \frac{(2+\alpha_+) \cdot sin(\pi/(2+\alpha_+))}{\pi(1+\alpha_+)} \cdot x^{(1+\alpha_+)/(2+\alpha_+)}, \qquad x \geq 0. \quad (9)$$

Remark 1. Let us consider in $L^2(\mathbb{R}_+)$ the minimal Sturm–Liouville operator

$$A_{\min} := -\frac{d}{dx}\left(x^{-\beta}\frac{d}{dx}\right), \quad \beta > -1,$$
$$\operatorname{dom}(A_{\min}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : f, f' \in AC_{comp}(\mathbb{R}_+),\ A_{\min} f \in L^2(\mathbb{R}_+)\}. \quad (10)$$

Here $AC_{comp}(\mathbb{R}_+)$ is the set of absolutely continuous functions with compact support in $\mathbb{R}_+$.

Denote by A the closure of $A_{\min}$, i.e., the minimal closed extension. Hence A is a symmetric operator (see [1]). It is not difficult to show that

$$M(\lambda) = -\frac{1}{\lambda\Gamma_\beta(\lambda)} = -\frac{(-\lambda)^{1/(2+\beta)}}{C_\beta \cdot \lambda} = \frac{1}{C_\beta \cdot (-\lambda)^{(1+\beta)/(2+\beta)}}, \quad (11)$$

is the Weyl function of the operator A, corresponding to a boundary triplet $\Pi = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ where

$$\Gamma_1 f = -f(0), \quad \Gamma_0 f = \lim_{x\to+0} x^{-\beta}\cdot f'(x), \quad f \in \mathrm{dom}(A^*).$$

Therefore the simple symmetric operators $A = \overline{A_{\min}}$ and L_+ of the form (10) and (6) respectively are unitarily equivalent if $\alpha_+ = -\beta/(1+\beta)$.

This fact and formulas (8), (9), (11) seems to be new.

3. Theorem 1 allows us to describe the main spectral properties of the operator $L_{\min}$.

Theorem 2. *(i) The operator $L_{\min}$ of the type* (5) *is a closed simple symmetric operator in $L^2(\mathbb{R};\ \rho)$ with deficiency indices $n_\pm(L_{\min}) = 2$.*

(ii) A triplet $\Pi = \{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, where $\Gamma_j : \mathrm{dom}(L^*_{\min}) \to \mathbb{C}^2, j \in \{0,1\}$, are defined by

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} f'(+0) \\ -f(-0) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_0 f = \begin{pmatrix} f(+0) \\ f'(-0) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

is a boundary triplet for $L^*_{\min}$.

(iii) The corresponding Weyl function $M(\cdot)$ is

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} -1/\Gamma_{\alpha_+}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\alpha_-}(-\lambda) \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{13}$$

Доказательство. (i) is an obvious corollary of Theorem 1.

According to [14] for all $f,\ g \in \mathrm{dom}(L^*_{\min})$ we have

$$(L^*_{\min} f,\ g) - (f,\ L^*_{\min} g) = f'(+0)\overline{g(+0)} + f'(-0)\overline{g(-0)} - f(+0)\overline{g'(+0)} - f(-0)\overline{g'(-0)}. \tag{14}$$

Using definitions of a boundary triplet and the corresponding Weyl function (see [4, 5]), we can proved (ii) and (iii). □

Further, note that the operator L of the form (4) is an almost solvable extension of $L_{\min}$. Moreover, it admits a representation $L = L_B = L^*_{\min}|\,\mathrm{dom}(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$, with $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hence we can easily describe the spectrum $\sigma(L)$ of L.

Proposition 1. The operator L has a real spectrum and $\sigma(L) = \mathbb{R}$. The point spectrum of L is empty, i.e., $\sigma_p(L) = \emptyset$.

Доказательство. Simple calculations show that $\mathbb{R} \subset \sigma(L)$ and $\ker(L-\lambda) = \{0\},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Then $\sigma_p(L) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Using the representation (13) for the Weyl function $M(\cdot)$ we have

$$\Psi(\lambda) := \det(B - M(\lambda)) = 1 + \Gamma_{\alpha_-}(-\lambda)/\Gamma_{\alpha_+}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{15}$$

It is obvious that $\Psi(\lambda) \neq 0$ for all $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Hence (by [4], Proposition 4) $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \rho(L)$ and $\sigma(L) = \mathbb{R}$. □

The following theorem is a generalization of the Fleige–Najman result [8].

Theorem 3. *The operator L of the form* (4) *with $\rho(\cdot)$ being of the form* (3) *is similar to a self–adjoint operator with absolutely continuous spectrum.*

Proof is based on the similarity criterion ([15, 17]) and Krein's formula for the resolvents of almost solvable extensions ([4, 5]).

Remark 2. Let us calculate the characteristic function $W_L(\cdot)$ of the operator L in the case $\alpha := \alpha_+ = \alpha_- > -1$. According to [4], Comment 6, the characteristic function $W_L(\cdot)$ is of the form $W_L(\lambda) = (B - M(\lambda))(B^* - M(\lambda))^{-1}$, since $\det((B-B^*)/2i) = 1 \neq 0$. Here $M(\cdot)$ is defined by (13). Note that

$$\Psi(\lambda) = \det(B - M(\lambda)) \equiv 1 + e^{-i\pi/(2+\alpha)} =: D_\alpha, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

After simple calculations we get

$$W_L(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 2/D_\alpha & 2/(D_\alpha \cdot \Gamma_\alpha(\lambda)) \\ -2 \cdot \Gamma_\alpha(-\lambda)/D_\alpha & 1 - 2/D_\alpha \end{pmatrix}. \tag{16}$$

It is easy to see that the characteristic function $W_L(\cdot)$ as well as its J-form $J - W_L^*(\cdot)JW_L(\cdot)$, where $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, are unbounded in $\mathbb{C}_+$ and known sufficient conditions of similarity to a self–adjoint operator (see [16]) are not applicable.

Note that L is similar to an operator $R = R^*$ with absolutely continuous spectrum $R = R_{ac}$ because $W_L(\cdot)$ is unbounded only in neighborhoods of zero and infinity.

Acknowledgements. The author is deeply grateful to M. Malamud and I. Karabash for numerous fruitful discussions.

References

[1] *Achieser N.I., Glasmann I.M.* Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. — Akademie-Verlag, Berlin 1975.

[2] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.—vol. 56.—no. 3(1985).—p.391–407.

[3] Ćurgus B., Najman B. *The operator* $-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$ *is similar to selfadjoint operator in* $L^2(\mathbb{R})$. // Proc. Amer. Math. Soc.—vol. 123(1995).—p.1125–1128.

[4] Derkach V. A., Malamud M. M. *Characteristic functions of almost solvable extensions of Hermitian operators.* // Ukr. Mat. J. — vol. 44, –no.4(1992)—p.435–459.

[5] Derkach V. A., Malamud M. M. *Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps* // J. Funct. Anal.—vol. 95(1991).—p.1–95.

[6] Faddeev M.M., Shterenberg R.G. *On similarity of singular differential operators to a selfadjoint one* // Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI, V. 270, Issledovaniya po Lineinym Operatoram i Teorii Funktsii, vol. 28(2000).— p.336–349.

[7] Faddeev M.M., Shterenberg R.G. *On similarity of differential operators to a selfadjoint one* // Math. Notes.—vol. 72(2002).—p.292–303.

[8] Fleige A., Najman B. *Nonsingularity of critical points of some differential and difference operators.*// Oper. Theory Adv. and Appl., Birkhäuser,Basel.—vol.106(1998).—p.147–155.

[9] Kapustin V. V. *Nonself–adjoint extensions of symmetric operators.* // Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI.—vol.282(2001).—p.92–105.

[10] Karabash I. M. *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—vol. 6.—no. 2(2000).—p.22–49.

[11] Karabash I. M., Kostenko A. S. *On similarity of the operators type* $\operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta\right)$ *to a normal or to a self–adjoint one.* // Math. Notes.—vol. 74.—no. 1(2003).—p.134–139.

[12] Karabash I. M., Malamud M. M. *On similarity of a J–self–adjoint Sturm–Liouville operator with finite zone potential to a self–adjoint one* // Dokl. Akad. Nauk.—vol. 395.—no. 3(2004).—p.303–307.(in russian)

[13] Kostenko A. S. *On similarity to a self–adjoint one of some indefinite Sturm–Liouville operators with singular potential.* // Math. Notes., to appear.

[14] *Kac I. S., Krein M. G.* On the spectral functions of the string. —Trans. AMS, series 2, **103**(1974), p.19–102.

[15] Malamud M. M. *A criterion for similarity of a closed operator to a self–adjoint one.* // Ukrainian Math. J.—vol. 37.—no. 1(1985).—p.49–56. (in russian)

[16] Malamud M. M. *Similarity of a Triangular Operator to a Diagonal Operator*// J. Math. Sciences.—vol. 115.—no.2(2000).— p.2199–2222.

[17] Naboko S. N. *On some conditions of similarity to unitary and selfadjoint operators.* // Funktsional. Anal. i. Prilozhen.—vol. 18.—no. 1(1984).—p.16–27. (in russian)

[18] Pyatkov S. G. *Certain properties of eigenfunctions of linear pencils.*// Math. Notes—vol. 51.(1992).—p.90–95.

Kostenko A.S., Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja 24, 83055 Donetsk, Ukraine.

E-mail: duzer@skif.net; duzer80@mail.ru

RESOLVENT MATRICES OF ISOMETRIC OPERATORS AND THEIR CONNECTION WITH CHARACTERISTIC FUNCTIONS

M.M. Malamud, V.I. Mogilevskii

1. Introduction

Let $\mathfrak{H}$ be a separable Hilbert space and let A be a closed densely defined symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$. It is well known (see, for example, [15, 16]) that the Krein-Naimark formula for generalized resolvents

$$\mathbb{R}_\lambda := P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda) \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\big(\tau(\lambda) + M(\lambda)\big)^{-1}\gamma^*(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm. \tag{1}$$

establishes a bijective correspondence between the set of all selfadjoint (canonical and exit space) extensions $\widetilde{A}$ of A and the set of all Nevanlinna families $\tau(\lambda) \in \widetilde{R}_{\mathcal{H}}$. Here $A_0 = A_0^*$ is a fixed canonical extension of A, $\gamma(\lambda)$ is the so-called γ-field of the operator A, and $M(\lambda)$ is a Q-function of the pair (A, A_0). Note that $\widetilde{A}$ is a canonical extension of A if and only if $\tau(\lambda) = \tau(\lambda)^*$ =const. Formula (1) for canonical resolvents (with $\tau(\lambda)$ =const) plays an important role in the theory of boundary value problems.

Further, let $\mathcal{L}$ be a subspace of $\mathfrak{H}$. A compressed resolvent $P_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\lceil\mathcal{L}$ of any selfadjoint (either canonical or exit space) extension $\widetilde{A}$ of A is called an $\mathcal{L}$-resolvent of A. Formula (1) implies the following description of the set of $\mathcal{L}$-resolvents of the operator A

$$\int \frac{d\Sigma(t)}{t - \lambda} = P_{\mathcal{L}}\mathbb{R}_\lambda\lceil\mathcal{L} = [w_{11}(\lambda)\tau(\lambda) + w_{12}(\lambda)][w_{21}(\lambda)\tau(\lambda) + w_{22}(\lambda)]^{-1}, \tag{2}$$

where $\Sigma(t) := P_{\mathcal{L}}E_{\widetilde{A}}(t)\lceil\mathcal{L}$ and $E_{\widetilde{A}}(\cdot)$ stands for the spectral measure of the extension $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$. The operator-matrix $W_{\mathcal{L}}(\lambda) := \big(w_{ij}(\lambda)\big)_{i,j=1}^2$ is expressed via parameters in formula (1) (see below) and is called an $\mathcal{L}$-resolvent matrix of A. It has been introduced by M.G. Krein [12] and investigated in details in [12, 13, 14, 18]. Moreover, M. G. Krein and Sh. Saakyan [19] have discovered a connection between the $\mathcal{L}$-resolvent matrix $W_{\mathcal{L}}(\cdot)$ and the characteristic operator function of some Y-colligation. Note, that an interest to $\mathcal{L}$-resolvent matrices is inspired by its importance in description of solutions of numerous classical problems like moment problem.

The Krein-Naimark formula (1) has been extended in [23, 7] to the case of a nondensely symmetric operator A. Moreover, V. Derkach and one of the coauthors have established (see [5, 6, 23, 7]) a connection between the Krein theory of generalized resolvents and the corresponding resolvent matrices on the one hand and the theory of boundary triplets and the corresponding Weyl functions on the other hand. To explain this connection we recall that a triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is called a boundary triplet for A^*, adjoint to a densely defined symmetric operator A, if $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ maps $\mathrm{dom} A^*$ onto $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ and the Green identity

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \qquad f, g \in \mathrm{dom}\, A^*, \tag{3}$$

holds. Here $\mathcal{H}$ is an auxilliary Hilbert space, $dim\mathcal{H} = n_\pm(A)$.

More precisely, it was shown in [6] (the case of a densely defined operator), and in [23, 7] (the case of a nondensely defined operator A) that each boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ for A^* generates the (unique) Krein-Naimark formula (1) where

$$A_0 = \ker \Gamma_0, \quad \gamma(\lambda) := (\Gamma_0\lceil\mathfrak{N}_\lambda)^{-1} \quad \text{and} \quad M(\lambda) := \Gamma_1\gamma(\lambda). \tag{4}$$

In other words, $M(\lambda)$ is the Weyl function (in the sense of [5]) corresponding to the triplet Π, and $\mathbb{R}_\lambda g$ is the solution of the "boundary value problem"

$$\{f, g\} \in (A^* - \lambda), \qquad \{\Gamma_0\mathbb{R}_\lambda g, -\Gamma_1\mathbb{R}_\lambda g\} \in \tau(\lambda). \tag{5}$$

If A (resp. $\tau(\lambda)$) is a densely defined operator (resp. an operator function) then the first (resp. second) relation in (5) takes a usual form $(A^*-\lambda)f=g$ $(\Gamma_1\mathbb{R}_\lambda g=-\tau(\lambda)\Gamma_0\mathbb{R}_\lambda g)$.

Further development of the theory of $\mathcal{L}$-resolvent matrices of a symmetric operator can be found in [6, 8, 9, 26]. Following [6, 9] to any boundary triplet $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ of A^* and any subspace $\mathcal{L}\subset\mathfrak{H}$ one associates the $\Pi\mathcal{L}$-preresolvent matrix-valued function $\mathfrak{U}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ with values in $[\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}]$, defined for each $\lambda\in\rho(A_0)$ by the equality

$$\mathfrak{U}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda):=\begin{pmatrix}a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda)\\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}M(\lambda) & \gamma^*(\overline{\lambda})\lceil\mathcal{L}\\ P_{\mathcal{L}}\gamma(\lambda) & P_{\mathcal{L}}(A_0-\lambda)^{-1}\lceil\mathcal{L}\end{pmatrix},\quad \lambda\in\rho(A_0). \tag{6}$$

To the matrix $\mathfrak{U}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ there corresponds a unique $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrix-valued function, holomorphic in $\rho(A;\mathcal{L})$

$$W_{\Pi\mathcal{L}}:=\begin{pmatrix}w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda)\\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda) & a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda)-a_{21}(\lambda)\\ a_{12}^{-1}(\lambda) & a_{12}^{1}(\lambda)a_{11}(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{7}$$

The following result has been established in [6, 8, 9]. For the sake of simplicity we present it only for a densely defined operator A.

Theorem 1. *([6, 8, 9]) Let A be a symmetric operator in $\mathfrak{H}$, $\overline{dom\,A}=\mathfrak{H}$, and let $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^*. Suppose additionally that $\mathcal{L}$ is a subspace in $\mathfrak{H}$, $S:=A\lceil\mathcal{L}^\perp$ and $P_{\mathcal{L}}dom\,A=\mathcal{L}$. Then*

(i) a collection $\Pi'=\{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L},\Gamma_0',\Gamma_1'\}$ with

$$\Gamma_0'\hat{f}=\{\Gamma_0 f,-l\},\quad \Gamma_1'\hat{f}=\{\Gamma_1 f,P_{\mathcal{L}}f\},\qquad \hat{f}=\{f,A^*f+l\}, \tag{8}$$

forms a boundary triplet for the relation S^* and the corresponding Weyl function coinsides with the $\Pi\mathcal{L}$-preresolvent matrix $\mathfrak{U}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$;

(ii) a collection $\Pi''=\{\mathcal{L}\oplus\mathcal{L},\Gamma_0'',\Gamma_1''\}$ where

$$\Gamma_0''\hat{f}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\Gamma_1 f+\Pi_{\mathcal{L}}f\\ \Gamma_0 f-l\end{pmatrix},\quad \Gamma_1''\hat{f}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\Gamma_0 f+l\\ \Gamma_1 f+P_{\mathcal{L}}f\end{pmatrix},\quad \hat{f}=\{f,Af+l\}, \tag{9}$$

forms a boundary triplet for S^*.

(iii) the relation $T:=gr\,A\dotplus\{0,\mathcal{L}\}$ is an almost solvable extension of S and

$$T^*=A^*\lceil\mathcal{L}^\perp=\ker(\Gamma_1''-iJ\Gamma_0''),\qquad J=i\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Moreover, the characteristic function of $T^*=A^*\lceil\mathcal{L}^\perp$ coinsides with the $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrix, that is

$$W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)=J\big(M(\lambda)-iJ\big)\big(M(\lambda)+iJ\big)^{-1}J,\quad \lambda\in\rho(T)=\rho(A;\mathcal{L}). \tag{11}$$

We emphasise that even if A is a densely defined operator, the $\mathcal{L}$-preresolvent matrix $\mathfrak{U}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ (resp. $\mathcal{L}$-resolvent matrix $W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$) is the Weyl function (resp. the characteristic function) of a nondensely defined operator $A\lceil\mathcal{L}^\perp$ (resp. $A^*\lceil\mathcal{L}^\perp$.)

Later on Krein-Naimark formula (1) as well as Krein's theory of $\mathcal{L}$-resolvent matrices have been generalized to the case of an isometric operator V $(V^*V=I)$ with arbitrary (not necessaryly equal) deficiency indices (see [3, 10, 20, 21, ?] and references therein).

In recent papers [24, 25] we introduced a concept of a boundary triplet for an isometric operator V with arbitrary deficiency indices and extended some results from [6, 8, 9] to this case. However, trying to obtain an analog of Theorem 1 we have understood that it cannot be obtained in the framework of the approach accepted in [24, 25]. Let us explain the reason of this fact. Note, that the Weyl function of isometric operator V introduced in [24, 25] is a contractive operator function in the unit disk $\mathbb{D}_1$. At the same time the $\mathcal{L}$-preresolvent matrix $A_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)=(a_{ij})_{i,j=1}^2$ of V is not contractive in D_1, since the operator function $a_{22}(\lambda):=P_{\mathcal{L}}(U_0-\lambda)^{-1}\lceil\mathcal{L}$ belongs to the Carateodory class in $\mathbb{D}_1$.

Moreover, we note that a connection between $\mathcal{L}$-resolvent matrices considered in [3, 10, 21, ?, 25], and the characteristic functions is unknown. To explain absence of such a connection we consider, for example, the $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrix $W_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ introduced in [25]. It is shown in [25] that $W_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ satisfies the identity

$$W_{\Pi\mathcal{L}}(\mu)J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0}W^*_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = (\mu\overline{\lambda} - 1)G_{\mathcal{L}}(\mu)G^*_{\mathcal{L}}(\lambda) - 2\mu\overline{\lambda}J_{\mathcal{L}}, \tag{12}$$

where $J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} := diag(I_{\mathcal{H}_1}, -I_{\mathcal{H}_0}) \neq J_{\mathcal{L}} := codiag(I_{\mathcal{L}}, I_{\mathcal{L}})$. Hence $W_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)/\sqrt{2}(\cdot)$ cannot be a characteristic function since it has no J-propery with any $J = J^* = J^{-1}$.

In this paper we change a concept of a boundary triplet of an isometry from [24, 25]. This new concept makes it possible to prove an annalog of Theorem 1 (see Theorems 4, 6and 7). In particular we prove the equality $W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \sqrt{2}\lambda W_T(\lambda)$, where $W_T(\cdot)$ is the characteristic function of a linear relation $T := T_{\mathcal{L}} = V^{-1*}\lceil\mathcal{L}^{\perp}$. To prove thsi equality we introduce a concept of almost solvable extensions of V and define their characteristic functions.

In passing we prove formulas for generalized resolvents of an isometry V and formulas for $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrices similar to that obtained in [25] under another definition of a boundary triplet. We emphasize that if now $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0$, then in formulas (24) and (25) for generalized resolvents, both $R_\lambda(U_0)$ and $R_\lambda(U_0)^{-1*}$ are the resolvents of unitary operators U_0 and U_0^{-1*} respectively, in contrast to similar formulas with a contractive operator U_0 in the papers [21, 24, 25] containing contractive operator U_0 in place of unitary one.

Notations: $\mathfrak{H}, \mathcal{H}$ are Hilbert spaces, P_L is an orthoprojection onto the subspace L in $\mathfrak{H}$, $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]([\mathfrak{H}])$ is the set of all bounded linear operators acting from $\mathfrak{H}_1$ to $\mathfrak{H}_2$ (in $\mathfrak{H}$), $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ $(\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}))$ is the set of all closed linear relations from $\mathfrak{H}_1$ to $\mathfrak{H}_2$ (in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$), $\mathbb{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{D}_0 = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_1$. The closed operator T mapping $\mathfrak{H}_1$ to $\mathfrak{H}_2$ is identified with its graph gr$T$, so that $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Let further $T^*(\in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1))$ be a dual relation which is adjoint to $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ and let $\operatorname{dom} T$, $\operatorname{ran} T$ and $\ker T$ be the domain, the range and the kernel of the linear relation T respectively.

Denote by $\rho(T)$ and $\hat{\rho}(T)$ the resolvent set and the set of regular type points of a linear relation $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ respectively. For any $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ let us introduce the subspaces

$$\mathfrak{M}_\lambda(T) = \operatorname{ran}(T - \lambda), \quad \mathfrak{N}_\lambda(T) := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}}(T), \quad \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(T) := \{\{f, \lambda f\} : f \in \mathfrak{N}_\lambda(T)\} \subset T^*,$$

where $\mathfrak{N}_\lambda(T)$ is the defect subspace of T.

It is clear that every linear relation $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ can be represented as

$$\theta = \{K_1, K_2; H\} := \{\{K_1 h, K_2 h\} : h \in H\}. \tag{13}$$

Here H is a Hilbert space with $\dim H = \dim\theta$ and $K_i \in [H, \mathfrak{H}_i]$ $(i \in \{1, 2\})$ are the operators such that $\ker K_1 \cap \ker K_2 = \{0\}$.

2. Boundary fours and the Weyl functions

Let V be an isometry in $\mathfrak{H}$ with the domain $\operatorname{dom} V$ and the range $\operatorname{ran} V$ and let $n_\pm = n_\pm(V)$ be the deficiency indices of V, i.e.,

$$n_+ := \dim(\operatorname{dom} V)^\perp = \dim \mathfrak{N}_\lambda(V), \ n_- := \dim(\operatorname{ran} V)^\perp = \dim \mathfrak{N}_\mu(V), \quad \mu, \lambda^{-1} \in \mathbb{D}_1.$$

In what follows we suppose for definiteness that $n_+ \leq n_-$.

Definition 1. A linear relation $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ is called a proper extension of an isometry V, if $V \subset \widetilde{A}$ and $V^{-1} \subset \widetilde{A}^*$. The set of all proper extensions of an isometry V will be denoted by $Ext(V)$.

Assume that $\mathcal{H}_0$ is an (auxiliary) Hilbert space, $\mathcal{H}_1$ is a subspace in $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$, $P_i = P_{\mathcal{H}_i}$, $i \in \{0, 1\}$ and $I_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0}$ is the operator of identical embedding of $\mathcal{H}_1$ into $\mathcal{H}_0$.

Definition 2. A collection $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, where $\Gamma_j : V^{-1*} \to \mathcal{H}_j$ $(j \in \{0,1\})$ are linear mappings will be called a boundary four of an isometry V, if the map $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top : V^{-1*} \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ is surjective and the Creen identity

$$(f,g) - (f',g') = (\Gamma_1 \hat{f}, \Gamma_0 \hat{g}) + (\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{g}) - (P_2 \Gamma_0 \hat{f}, P_2 \Gamma_0 \hat{g}) \tag{14}$$

holds for all $\hat{f} = \{f, f'\}, \hat{g} = \{g, g'\} \in V^{-1*} = (V^*)^{-1}$.

By means of the operator

$$J = \begin{pmatrix} -P_2 & I_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} \\ P_1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \tag{15}$$

we can rewrite identity (14) as

$$(f,g) - (f',g') = (J\Gamma \hat{f}, \Gamma \hat{g}).$$

Remark 3. Note, that if $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0$, then $\mathcal{H}_2 = 0,\ P_2 = 0,\ P_1 = I_{\mathcal{H}_1}$, and $J = codiag(I_{\mathcal{H}_1}, I_{\mathcal{H}_1})$. Now identity (14) is essentially simplified and takes a form

$$(f,g) - (f',g') = (\Gamma_1 \hat{f}, \Gamma_0 \hat{g}) + (\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{g}), \qquad \hat{f} = \{f, f'\}, \hat{g} = \{g, g'\} \in (V^*)^{-1}. \tag{16}$$

In this case a boundary four $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ for V turns into a boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ for V with $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1$, and its definition becoms close to that of an operator A^* with A being a symmetric.

Note also that the Green identity in [24, 25] has the form

$$(f,g) - (f',g') = (\Gamma_1 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{g})_{\mathcal{H}_1} - (\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_0 \hat{g})_{\mathcal{H}_0}, \qquad \hat{f} = \{f, f'\}, \hat{g} = \{g, g'\} \in (V^*)^{-1}. \tag{17}$$

The identity similar to (17) was a starting point of investigation of the Abstract Interpolation Problem in [11].

An extension $U_0 := \ker \Gamma_0$ is naturally associated to any boundary four Π and it plays an important role in the sequel. It is easily seen that U_0 is an isometry in $\mathfrak{H}$ with the domain $\operatorname{dom} U_0 = \mathfrak{H}$. The following properties are implied by Definition 2:

1) $n_+ = \dim \mathcal{H}_1 \le \dim \mathcal{H}_0 = n_-$.

2) the extension $\ker P_1\Gamma_0$ coincides with the linear relation

$$U_0^{-1*} = \{\{f, U_0 f + n\} : \quad f \in \mathfrak{H},\ n \in (\operatorname{ran} U_0)^\perp\}.$$

In particular, U_0 is a unitary operator if and only if $P_1 = I_{\mathcal{H}}$, i.e., $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0$.

3) the mapping $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top : V^{-1*} \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ establishes a bijective correspondence between the set of all proper extensions $\widetilde{A} \in Ext(V)$ and the set of all linear relations $\theta := \Gamma(\widetilde{A}) (\in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1))$. In what follows we will write $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta := \{\hat{f} \in V^{-1*} : \{\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{f}\} \in \theta\}$

4) Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of the isometry V. Then the equality $\widetilde{\Gamma} = X\Gamma$ establishes a bijective correspondence between the set of all boundary fours $\widetilde{\Pi} = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ of V and J-unitary operators $X \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1]$.

Remark 4. If $n_+ < \infty$, then $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0$ if and only if $n_+ = n_-$. At the same time in the case $n_+ = n_- = \infty$ the subspace $\mathcal{H}_1$ may coincide or not coincide with $\mathcal{H}_0$. In what follows we do not exclude both these cases from our considerations.

Proposition 1. Let $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of the isometry V and let π_1 be the orthoprojection in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H} \oplus \{0\}$. Then the equalities

$$\gamma_+(\lambda) = \pi_1 \big(\Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(V^{-1})\big)^{-1}, \ \ \lambda \in \mathbb{D}_0;$$

$$\gamma(\lambda) = \gamma_+(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_1, \ \ \lambda \in \mathbb{D}_0; \quad \gamma(z) = \pi_1 \big(P_1 \Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_z(V^{-1})\big)^{-1}, \ \ z \in \mathbb{D}_1$$

correctly define the operator-functions (γ-fields) $\gamma_+(\cdot) : \mathbb{D}_0 \to [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}]$, $\gamma(\cdot) : \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_0 \to [\mathcal{H}_1, \mathfrak{H}]$.

Proposition 1 allows us to introduce the following

Definition 3. Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of the isometry V and let $G_1 = \Gamma_1 - P_2\Gamma_0$ be a map from V^{-1*} to $\mathcal{H}_0$. The operator functions $M_+(\cdot) : \mathbb{D}_0 \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ and $M_-(\cdot) : \mathbb{D}_1 \to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ defined by

$$\Gamma_1 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(V^{-1}) = M_+(\lambda)\Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(V^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}_0;$$
$$G_1 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_z(V^{-1}) = M_-(z)P_1\Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_z(V^{-1}), \quad z \in \mathbb{D}_1.$$

will be called the Weyl functions corresponding to a boundary four Π.

Let $\lambda \in \mathbb{D}_0,\ z \in \mathbb{D}_1$. In accordance with the decomposition $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ the operator functions $M_+(\lambda)$ and $M_-(z)$ admit the block-matrix representations

$$M_+(\lambda) = (M(\lambda) \quad N_+(\lambda)), \quad M_-(z) = (M(z) \quad N_-(z))^\top. \tag{18}$$

Define by means of (18) the operator functions

$$M(\cdot) : \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_0 \to [\mathcal{H}_1], \quad N_+(\cdot) : \mathbb{D}_0 \to [\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1], \quad N_-(\cdot) : \mathbb{D}_1 \to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2].$$

Proposition 2. Let $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of an isometry V. Then:
1) the operator functions $\gamma_+(\cdot), \gamma(\cdot)$ are holomorphic on their domains and the following equalities hold

$$\gamma_+(\mu) = \gamma_+(\lambda) + (\mu - \lambda)(U_0 - \mu)^{-1}\gamma_+(\lambda), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{D}_0$$
$$\gamma(z) = \gamma(\lambda) + (z - \lambda)U_0^*(I - zU_0^*)^{-1}\gamma(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_0,\ z \in \mathbb{D}_1$$

2) the Weyl functions $M_+(\cdot), M_-(\cdot)$ are holomorphic on $\mathbb{D}_0$ and $\mathbb{D}_1$ respectively and the following equalities hold

$$M_+(\lambda) + M_+^*(\mu)P_1 - P_2 = (1 - \lambda\overline{\mu})\gamma_+^*(\mu)\gamma_+(\lambda), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{D}_0$$
$$M(\omega) + M^*(z) - N_-^*(z)N_-(\omega) = (1 - \omega\overline{z})\gamma^*(z)\gamma(\omega), \quad \omega, z \in \mathbb{D}_1 \tag{19}$$
$$M_+(\lambda) + M_-^*(z) = (1 - \lambda\overline{z})\gamma^*(z)\gamma_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D}_0, z \in \mathbb{D}_1 \tag{20}$$

It follows from (19) that the function $M(\cdot)$ belongs to the Caratheodory class in $\mathbb{D}_1$, i.e., $ReM(\lambda) \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{D}_1$. Moreover in view of (20) $M_+^*(\lambda^{-1}) = -M_-(\overline{\lambda}),\ \lambda \in \mathbb{D}_1$.

Proposition 3. Let under assumptions of Proposition 2 $\mathfrak{M} = (\operatorname{ran} V)^\perp$, $\hat{\mathfrak{M}} = \{\{0, m\} : m \in \mathfrak{M}\}$ and let π_2 be the orthoprojection in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ onto $\{0\} \oplus \mathfrak{H}$. Then:
1)formulas

$$\gamma_+(\infty) = \pi_2(\Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{M}})^{-1}, \quad \Gamma_1 \upharpoonright \hat{\mathfrak{M}} = M_+(\infty)\Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{M}}$$

correctly define the operators

$$\gamma_+(\infty) := (\gamma(\infty) \quad \delta_+(\infty)) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathfrak{M}, \qquad M_+(\infty) = (M(\infty) \quad N_+(\infty)) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1,$$

associated to $\gamma(\lambda)$ and $M(\lambda)$ by

$$\gamma(\lambda) = -(U_0 - \lambda)^{-1}\gamma(\infty), \quad M(\infty) = \lim_{\lambda \to \infty} M(\lambda). \tag{21}$$

Moreover $M(\infty) + M^*(\infty) = -\gamma^*(\infty)\gamma(\infty)$.
2) the following equality holds

$$M_+(\lambda) = M_+(\infty) + \gamma^*(\infty)U_0(U_0 - \lambda)^{-1}\gamma_+(\infty), \quad \lambda \in \mathbb{D}_0 \tag{22}$$

Remark 5. If $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0$, then the operator U_0 is unitary, $M_+(\lambda) = M(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{D}_0$, and by (21),(22) the operator function $\theta(z) := -2M(z^{-1}),\ z \in \mathbb{D}_1$, coincides with the impedance of a conservative linear dynamical system [1].

3. Formulas for generalized coresolvents

Let $\tau_i(\cdot)$ be families of linear relations defined on $\mathbb{D}_i$ with values in $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_{i+1})$, $i \in \{0,1\}, \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0$. According to (13) the representations

$$\tau_0(\lambda) = \{K_0(\lambda), K_1(\lambda); H_0\}, \quad \tau_1(\mu) = \{N_1(\mu), N_0(\mu); H_1\}, \quad \lambda, \mu^{-1} \in \mathbb{D}_0, \tag{23}$$

are valid. Here H_i are auxiliary Hilbert spaces, $K_i(\cdot) : \mathbb{D}_0 \to [H_0, \mathcal{H}_i]$ and $N_i(\cdot) : \mathbb{D}_1 \to [H_1, \mathcal{H}_i]$, $i \in \{0,1\}$.

Definition 4. A pair of families of linear relations $\tau = \{\tau_0(\cdot), \tau_1(\cdot)\}$ is referred to the class $\mathcal{K}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, if the operator functions $K_i(\cdot), N_i(\cdot)$, $i \in \{0,1\}$ are holomorphic on their domains and the following relations hold:

1) $Re K_0^*(\lambda) K_1(\lambda) + K_0^*(\lambda) P_2 K_0(\lambda) \le 0, \;\; 0 \in \rho(K_1(\lambda) - P_1 K_0(\lambda)), \;\; \lambda \in \mathbb{D}_0$

2) $Re N_1^*(\lambda) P_1 N_0(\lambda) + N_0^*(\lambda) P_2 N_0(\lambda) \ge 0,$

$$0 \in \rho((P_1 + 2P_2) N_0(\lambda) + N_1(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{D}_1$$

3) $K_0^*(\lambda) N_0(\overline{\lambda}^{-1}) + K_1^*(\lambda) N_1(\overline{\lambda}^{-1}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{D}_0.$

A pair of families $\tau = \{\tau_0(\cdot), \tau_1(\cdot)\} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ is referred to the class $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, if in the representation (23) $H_0 = H_1$, $K_i(\cdot) = K_i, N_i(\cdot) = N_i$, $i \in \{0,1\}$ (i.e., the operator functions $K_i(\cdot), N_i(\cdot)$ are constant on their domains) and $N_1 = P_1 K_0, N_0 = K_1 + P_2 K_0$.

If $\tau = \{\tau_0(\cdot), \tau_1(\cdot)\} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, then in the representation (23) $\dim H_0 = \dim \mathcal{H}_1$, $\dim H_1 = \dim \mathcal{H}_0$. Therefore in the case $n_+ < n_-$ the equality $H_0 = H_1$ is impossible.

For a linear relation $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ we let $R_\lambda(T) := I + 2\lambda(T - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T)$. Recall the following

Definition 5. An operator function $\mathbb{R}_\lambda = P_{\mathfrak{H}} R_\lambda(\widetilde{U}) \restriction \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_0$ is called a generalized coresolvent of an isometry V, if $\widetilde{U}$ is a unitary extension of V acting in the Hilbert space $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$.

Theorem 2. *Let $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of an isometry V and let $M_\pm(\lambda)$ be the corresponding Weyl functions. Then formulas*

$$\mathbb{R}_\lambda = R_\lambda(U_0) + 2\gamma_+(\lambda) K_0(\lambda) \big(K_1(\lambda) + M_+(\lambda) K_0(\lambda)\big)^{-1} \gamma^*(\overline{\lambda}^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}_0, \tag{24}$$

$$\mathbb{R}_\lambda = R_\lambda(U_0^{-1*}) + 2\gamma(\lambda) N_1(\lambda) \big(N_0(\lambda) + M_-(\lambda) N_1(\lambda)\big)^{-1} \gamma_+^*(\overline{\lambda}^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}_1, \tag{25}$$

establishes a bijective correspondence between generalized coresolvents $\mathbb{R}_\lambda$ and pairs of families $\tau = \{\tau_0(\cdot), \tau_1(\cdot)\} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ defined by (23). Moreover in (24), (25) the pairs $\tau \in \mathcal{K}_0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ correspond to canonical coresolvents (this may take place only in the case $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_0$*($\iff n_+ = n_-$)).*

4. Resolvent matrices and $\mathcal{L}$-coresolvents

Let $\mathcal{L}$ be a subspace in $\mathfrak{H}$. Taking into account formulas (24), (25) we associate to every boundary four $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ of an isometry V two preresolvent matrices

$$A_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \big(a_{ij}(\lambda)\big)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} M_-(\lambda) & \sqrt{2}\gamma_+^*(\overline{\lambda}^{-1}) \restriction L \\ -\sqrt{2} P_L \gamma(\lambda) & P_L R_\lambda(U_0^{-1*}) \restriction L \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{D}_1, \tag{26}$$

$$\widetilde{A}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \big(\widetilde{a}_{ij}(\lambda)\big)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} M_+(\lambda) & \sqrt{2}\gamma^*(\overline{\lambda}^{-1}) \restriction L \\ -\sqrt{2} P_L \gamma_+(\lambda) & P_L R_\lambda(U_0) \restriction L \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{D}_0. \tag{27}$$

Operator-functions $A_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ and $\widetilde{A}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ take on values in $[\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{L}, \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{L}]$ and $[\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{L}, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{L}]$ respectively and $A_{\Pi\mathcal{L}}^*(\lambda) = -\widetilde{A}_{\Pi\mathcal{L}}(\overline{\lambda}^{-1})$.

Denote by $\rho(V,\mathcal{L})$ the (open) set of the points $\lambda\in\hat\rho(V)$, for which the direct decomposition $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}_\lambda(V)\dotplus\mathcal{L}$ holds. One can easily prove the equivalences

$$\lambda\in\mathbb{D}_1\cap\rho(V,\mathcal{L})\Leftrightarrow 0\in\rho(a_{12}(\lambda)),\quad \lambda\in\mathbb{D}_0\cap\rho(V,\mathcal{L})\Leftrightarrow 0\in\rho(\widetilde{a}_{12}(\lambda)). \tag{28}$$

The relations (28) allows us to introduce the following

Definition 6. The operator functions $W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda):\mathbb{D}_1\cap\rho(V,\mathcal{L})\to[\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}]$ and $\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda):D_0\cap\rho(V,\mathcal{L})\to[\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_0,\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}]$, defined by

$$W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda):=\sqrt{2}\lambda\begin{pmatrix}a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda) & a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda)-a_{21}(\lambda)\\ a_{12}^{-1}(\lambda) & a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda):=\sqrt{2}\lambda\begin{pmatrix}\widetilde{a}_{22}(\lambda)\widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda) & \widetilde{a}_{22}(\lambda)\widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda)\widetilde{a}_{11}(\lambda)-\widetilde{a}_{21}(\lambda)\\ \widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda) & \widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda)\widetilde{a}_{11}(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{30}$$

will be called the $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrices of an isometry V corresponding to a boundary four Π and a subspace $\mathcal{L}$.

Let $\mathcal{L}$ be a subspace in $\mathfrak{H}$, let $\mathbb{R}_\lambda$ be a generalized coresolvent and let $E(t)$ be a spectral (not necessary orthogonal) function of an isometry V. Recall that the operator functions $P_\mathcal{L}\mathbb{R}_\lambda\restriction\mathcal{L}$ and $\Sigma_\mathcal{L}(t):=P_\mathcal{L}E(t)\restriction\mathcal{L}$ are called $\mathcal{L}$-coresolvent and $\mathcal{L}$-spectral function of an isometry V respectively. It is well known that the equality

$$P_\mathcal{L}\mathbb{R}_\lambda\restriction\mathcal{L}=P_\mathcal{L}(\widetilde{U}+\lambda)(\widetilde{U}-\lambda)^{-1}\restriction\mathcal{L}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\,d\Sigma_\mathcal{L}(t),\quad \lambda\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_0,$$

establishes a bijective correspondence between $\mathcal{L}$-coresolvents and $\mathcal{L}$-spectral functions.

In the following theorem we describe the set of all $\mathcal{L}$-coresolvents (hence the set of all L-spectral functions) of an isometry V by means of $\mathcal{L}$-resolvent matrices.

Theorem 3. *Assume that V is an isometry in $\mathfrak{H}$, $\mathcal{L}_0$ and $\mathcal{L}_1$ are subspaces in $\mathfrak{H}$, $\mathbb{D}_1\cap\rho(V,\mathcal{L}_0)\neq\emptyset$ and $\mathbb{D}_0\cap\rho(V,\mathcal{L}_1)\neq\emptyset$. Let also $\Pi=\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ be a boundary four of V and let $W_{\Pi\mathcal{L}_0}(\lambda)=(w_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ and $\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}_1}(\lambda)=(\widetilde{w}_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ be the corresponding $\mathcal{L}_0$- and $\mathcal{L}_1$-resolvent matrices. Then two formulas*

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{L}_0}\mathbb{R}_\lambda\restriction\mathcal{L}_0=&\big(w_{11}(\lambda)N_0(\lambda)+w_{12}(\lambda)N_1(\lambda)\big)\times\\ &\big(w_{21}(\lambda)N_0(\lambda)+w_{22}(\lambda)N_1(\lambda)\big)^{-1},\quad \lambda\in\mathbb{D}_1\cap\rho(V,\mathcal{L}_0),\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{L}_1}\mathbb{R}_\lambda\restriction\mathcal{L}_1=&\big(\widetilde{w}_{11}(\lambda)K_1(\lambda)+\widetilde{w}_{12}(\lambda)K_0(\lambda)\big)\times\\ &\big(\widetilde{w}_{21}(\lambda)K_1(\lambda)+\widetilde{w}_{22}(\lambda)K_0(\lambda)\big)^{-1},\quad \lambda\in\mathbb{D}_0\cap\rho(V,\mathcal{L}_1),\end{aligned} \tag{32}$$

establish a bijective correspondence between the set of $\mathcal{L}_0$-coresolvents ($\mathcal{L}_1$-coresolvents) on the one hand and the pairs of families of linear relations $\tau=\{\tau_0(\cdot),\tau_1(\cdot)\}\in\mathcal{K}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ of the form (23).

Note that under the assumptions of Theorem 3 $n_+=\dim\mathcal{L}_1\le\dim\mathcal{L}_0=n_-$. Therefore the equality $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_0$ may take place only in the case $n_+=n_-$.

Let $\lambda\in\rho(V,\mathcal{L})$ and let $\mathcal{P}_\mathcal{L}(\lambda)$ be the skew projection onto $\mathcal{L}$ in the decomposition $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}_\lambda(V)\dotplus\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}_\mathcal{L}(\lambda):=\mathcal{P}_\mathcal{L}(\lambda)-2\lambda P_\mathcal{L}(V-\lambda)^{-1}(I-\mathcal{P}_\mathcal{L}(\lambda))$. Clearly, the operator functions $\mathcal{P}_\mathcal{L}(\cdot)$ and $\mathcal{Q}_\mathcal{L}(\cdot)$ are holomorphic on $\rho(V,\mathcal{L})$ and take on values in $[\mathfrak{H},\mathcal{L}]$.

Introduce the operator functions $\hat{\mathcal{P}}_\mathcal{L}(\lambda),\hat{\mathcal{Q}}_\mathcal{L}(\lambda):\ \rho(V,\mathcal{L})\to[\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H},\mathcal{L}]$ by setting

$$\hat{\mathcal{P}}_\mathcal{L}(\lambda)=(\lambda\mathcal{P}_\mathcal{L}(\lambda)\quad \mathcal{P}_\mathcal{L}(\lambda)),\quad \hat{\mathcal{Q}}_\mathcal{L}(\lambda)=(\lambda\mathcal{Q}_\mathcal{L}(\lambda)-2\lambda P_\mathcal{L}\quad \mathcal{Q}_\mathcal{L}(\lambda))$$

It is easily seen that $\hat{\mathcal{P}}_\mathcal{L}^*(\lambda)\mathcal{L}\subset V^{-1*}$ and $\hat{\mathcal{Q}}_\mathcal{L}^*(\lambda)\mathcal{L}\subset V^{-1*}$.

Theorem 4. *Suppose that $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is a boundary four of an isometry V, $G_1 = \Gamma_1 - P_2\Gamma_0$, $\mathcal{L}$ is a subspace in $\mathfrak{H}$ and $W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ and $\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$ are the corresponding $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrices. Then*

(i) the following equalities hold

$$W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Gamma_0\hat{\mathcal{Q}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) & \Gamma_0\hat{\mathcal{P}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) \\ -\Gamma_1\hat{\mathcal{Q}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) & -\Gamma_1\hat{\mathcal{P}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) \end{pmatrix}^*, \quad \lambda \in \mathbb{D}_1 \cap \rho(V, \mathcal{L}), \tag{33}$$

$$\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix} P_1\Gamma_0\hat{\mathcal{Q}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) & P_1\Gamma_0\hat{\mathcal{P}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) \\ -G_1\hat{\mathcal{Q}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) & -G_1\hat{\mathcal{P}}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) \end{pmatrix}^*, \quad \lambda \in \mathbb{D}_0 \cap \rho(V, \mathcal{L}); \tag{34}$$

(ii) for all $\lambda, \mu \in \mathbb{D}_1 \cap \rho(V, \mathcal{L})$, $z, \omega \in \mathbb{D}_0 \cap \rho(V, \mathcal{L})$ the identity

$$W_{\Pi\mathcal{L}}(\mu) J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} W^*_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = (1 - \mu\overline{\lambda})\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(\mu)\mathcal{G}^*_{\mathcal{L}}(\lambda) + 2\mu\overline{\lambda} J_{\mathcal{L}}, \tag{35}$$

$$\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(z) J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} \widetilde{W}^*_{\Pi\mathcal{L}}(\omega) = (1 - z\overline{\omega})\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(z)\mathcal{G}^*_{\mathcal{L}}(\omega) + 2z\overline{\omega} J_{\mathcal{L}}, \tag{36}$$

is valid. Here $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(\lambda) = (\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}(\lambda) \ \ \mathcal{P}_{\mathcal{L}}(\lambda))^\top$,

$$J_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{L}} \\ I_{\mathcal{L}} & 0 \end{pmatrix} \in [\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}], \quad J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} P_2 & I_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} \\ P_1 & 0 \end{pmatrix} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1], \tag{37}$$

$$J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} = \begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ I_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} & P_2 \end{pmatrix} \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0].$$

Remark 6. (i) Formulas (33), (34) are similar to that discovered in [6, 8, 9] for $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrices of symmetric operators. Note also that similar formulas for $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrices of V have also been obtained in [24, 25] under another definition of a bondary triplet of an isometry.

(ii) If $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathcal{L}$, then $J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} = J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} = J_{\mathcal{L}}$. In this case the identities (35), (36) yield J-properties of the matrix-functions $W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda)$. The comparison of the identities (35), (36) with similar one from [3, 21] is contained in [25].

5. Characteristic functions

Let $\mathcal{H}_0, E$ be Hilbert spaces, let $\mathcal{H}_1$ be a subspace in $\mathcal{H}_0$ and let $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$.

Definition 7. A collection $\nu = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, B; K, J, E\}$, in which $B = (B_1 \quad B_2) \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1]$, $K \in [E, \mathcal{H}_1]$ and $J \in [E]$, will be called a V-colligation of the first kind, if $J = J^* = J^{-1}$ and the equality $ReB_1 + \frac{1}{2}B_2B_2^* = KJK^*$ holds.

A collection $\xi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \theta; N, \mathcal{J}, E\}$, in which $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $N \in [E, \mathcal{H}_1]$ and $\mathcal{J} \in [E]$, will be called a V-colligation of the second kind, if $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$, $\theta = \{I_{\mathcal{H}_1} + C_2, C_1; \mathcal{H}_1\}$, $C_1 \in [\mathcal{H}_1], C_2 \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$, and the equality $ReC_1 - \frac{1}{2}C_2^*C_2 = N\mathcal{J}N^*$ holds.

It is not difficult to show that each operator $B \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ can be included to the V-colligation of the first kind. Similarly each linear relation of the form $\theta = \{I_{\mathcal{H}_1} + C_2, C_1; \mathcal{H}_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ can be included to the V-colligation of the second kind. Moreover every V-colligation of the first kind $\nu = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, B;\ K, J, E\}$ generates the V-colligation of the second kind

$$\nu^\times := \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, B^\times; K, -J, E\} \tag{38}$$

where $B^\times := \{I_{\mathcal{H}_1} + B_2^*, -B_1^*; \mathcal{H}_1\}$.

Proposition 4. Let $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of an isometry V, $B \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$. Then $(\widetilde{A}_B)^{-1*} = \widetilde{A}_{B^\times}$.

Definition 8. An extension $T \in Ext(V)$ will be referred to the class $As_1(V)$, if there exist a boundary four $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ and an operator $B \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ such that $T = \widetilde{A}_B = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$.

An extension $T \in Ext(V)$ will be referred to the class $As_2(V)$, if there exist a boundary four $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ and operators $C_1 \in [\mathcal{H}_1], C_2 \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ such that $T = \widetilde{A}_\theta$, where $\theta = \{I_{\mathcal{H}_1} + C_2, C_1; \mathcal{H}_1\}$.

In view of Proposition 4 the equivalence $T \in As_1(V) \iff T^{-1*} \in As_2(V)$ holds.

Proposition 5. If $T \in Ext(V)$ and $\mathbb{D}_1 \cap \rho(T) \neq \emptyset$ $(\mathbb{D}_0 \cap \rho(T) \neq \emptyset)$, then $T \in As_1(V)$ $(T \in As_2(V))$.

Let $T \in As_1(V)$ and let $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of V such that $T = \widetilde{A}_B,\ B = (B_1 \quad B_2) \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1]$. Include the operator B in the V-colligation of the first kind $\nu = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, B; K, J, E\}$ and introduce the operators $\widetilde{J} \in [E \oplus \mathcal{H}_2],\ \widetilde{B} \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2],\ \widetilde{K}_+, \widetilde{K}_- \in [E \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2]$ by setting $\widetilde{J} = \operatorname{diag}(J, -I_{\mathcal{H}_2})$,

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{K}_+ = \begin{pmatrix} K & \frac{1}{\sqrt{2}} B_2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{K}_- = \begin{pmatrix} K & \frac{1}{\sqrt{2}} B_2 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Definition 9. The operator function $W(\cdot) = W_T(\cdot) : \rho(T^{-1*}) \to [E \oplus \mathcal{H}_2, E]$ defined by

$$W(\lambda) = \begin{cases} P_E - 2K^*(B^* + M_-(\lambda))^{-1} \widetilde{K}_- \widetilde{J}, & \lambda \in \mathbb{D}_1 \cap \rho(T^{-1*}) \\ P_E - 2K^* P_1 (\widetilde{B}^* + M_+(\lambda))^{-1} \widetilde{K}_+ \widetilde{J}, & \lambda \in \mathbb{D}_0 \cap \rho(T^{-1*}) \end{cases} \tag{39}$$

will be called the characteristic function (CF) of a linear relation $T \in As_1(V)$.

Similarly let $T \in As_2(V)$ and let $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of V such that $T = \widetilde{A}_\theta$ with $\theta = \{I_{\mathcal{H}_1} + C_2, C_1; \mathcal{H}_1\}$. Include the linear relation θ in the V-colligation of the second kind $\xi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \theta; N, \mathcal{J}, E\}$ and introduce the operators $\widetilde{\mathcal{J}} \in [E \oplus \mathcal{H}_2],\ C \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2],\ \widetilde{C} \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2],\ \widetilde{N}_+, \widetilde{N}_- \in [E \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2]$ by setting $\widetilde{\mathcal{J}} = \operatorname{diag}(\mathcal{J}, I_{\mathcal{H}_2}),\ C = (C_1 \quad -C_2)^\top$,

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & -I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{N}_+ = \begin{pmatrix} N & \frac{1}{\sqrt{2}} C_2^* \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{N}_- = \begin{pmatrix} N & \frac{1}{\sqrt{2}} C_2^* \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Definition 10. The operator function $\Omega(\cdot) = \Omega_T(\cdot) : \rho(T^{-1*}) \to [E, E \oplus \mathcal{H}_2,]$ defined by

$$\Omega(\lambda) = \begin{cases} I_E - 2\widetilde{N}_-^* (\widetilde{C}^* + M_-(\lambda) P_1)^{-1} | \mathcal{H}_1\ N \mathcal{J}, & \lambda \in \mathbb{D}_1 \cap \rho(T^{-1*}) \\ I_E - 2\widetilde{N}_+^* (C^* + M_+(\lambda))^{-1} N \mathcal{J}, & \lambda \in \mathbb{D}_0 \cap \rho(T^{-1*}) \end{cases} \tag{40}$$

will be called the characteristic function of a linear relation $T \in As_2(V)$.

Proposition 6. *1)* CF $W(\cdot)$ and $\Omega(\cdot)$ satisfy the relations

$$(1 - |\lambda|)(W(\lambda) \widetilde{J} W^*(\lambda) - J) \le 0, \quad (1 - |\lambda|)(W^*(\lambda) J W(\lambda) - \widetilde{J}) \le 0,$$
$$(1 - |\lambda|)(\Omega(\lambda) \mathcal{J} \Omega^*(\lambda) - \widetilde{\mathcal{J}}) \le 0, \quad (1 - |\lambda|)(\Omega^*(\lambda) \widetilde{\mathcal{J}} \Omega(\lambda) - \mathcal{J}) \le 0$$

2) Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of V and let $W_T(\cdot)$ be CF of an extension $T = \widetilde{A}_B$, corresponding to the V-colligation of the first kind $\nu = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, B; K, J, E\}$. Let further $\Omega_{T^{-1*}}(\cdot)$ be CF of the extension $T^{-1*} = \widetilde{A}_{B^\times}$, corresponding to the V-colligation of the second kind $\nu^\times$ (see (38)). Then

$$\Omega_{T^{-1*}}(\overline{\lambda}^{-1}) = \widetilde{J} W_T^*(\lambda) J, \quad W_T(\lambda) = \mathcal{J} \Omega_{T^{-1*}}^*(\overline{\lambda}^{-1}) \widetilde{\mathcal{J}}, \quad \lambda \in \rho(T^{-1*})$$

3) If $T \in As_1(V)$ $(T \in As_2(V))$ and $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(T^{-1*})$, then $0 \in \rho(W_T(\lambda))$ $(0 \in \rho(\Omega_T(\lambda)))$ and the following identities hold

$$W_T^{-1}(\lambda) = \widetilde{J} W_T^*(\overline{\lambda}^{-1}) J \quad (\Omega_T^{-1}(\lambda) = \mathcal{J} \Omega_T^*(\overline{\lambda}^{-1}) \widetilde{\mathcal{J}}).$$

Remark 7. (1) Assume that $n_+(V) = n_-(V)$, $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is a boundary four of V such that $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ and $T = \widetilde{A}_B$, $B \in \mathcal{H}$. Then $T \in As_1(V) \cap As_2(V)$, $\mathcal{H}_2 = 0$, $B_2 = 0$, $\widetilde{B} = B$, $M_- = M_+ = M$ and formulas (39), (40) can be written by the unique expression

$$W_T(\lambda) = \Omega_T(\lambda) = I_E - 2K^*(B^* + M(\lambda))^{-1}KJ, \quad \lambda \in \rho(T^{-1*}).$$

This formula for the characteristic function is similar to that obtained in [6, 7] for the CF of an almost solvable extension of a symmetric operator A with equal deficiency indices. Note also that properties of $W(\cdot)$ and $\Omega(\cdot)$ mentiond in Proposition 6 are similar to that of properties of CF of bounded and unbounded operators proved in [4, 6, 7].

(2) It is shown in [6] that the inclusion $\rho(T) \neq \emptyset$ is not sufficient for a linear relation T to be an almost solvable extension of a symmetric operator A. Therefore chracteristic functions in the sense of [6, 7, 9] are not defined for any extension T with nonempty resolvent set. At the same time by Proposition 5 at least one of CF (39), (40) makes sense for every extension $T \in Ext(V)$ with nonempty resolvent set, $\rho(T) \neq \emptyset$.

6. A connection between resolvent matrices and characteristic functions

For an isometry $V \in [\mathfrak{H}]$ and a subspace $\mathcal{L} \subset \mathfrak{H}$ we let $V_{\mathcal{L}} = V \restriction \mathcal{L}^{\perp}$, $T_{\mathcal{L}} = V^{-1*} \restriction \mathcal{L}^{\perp} \in Ext(V_{\mathcal{L}})$. It is easily seen that the extension $T_{\mathcal{L}}$ is not an operator , i.e., $T_{\mathcal{L}}(0) \neq \{0\}$. Moreover if

$$\mathfrak{N} \cap \mathcal{L} = \{0\} \quad \text{and} \quad \overline{\mathfrak{N} \dotplus \mathcal{L}} = \mathfrak{N} \dotplus \mathcal{L}, \tag{41}$$

then $T_{\mathcal{L}}^{-1*} = \{\{f + l, Vf\} : f \in \operatorname{dom} V, l \in \mathcal{L}\}$ and $\rho(T_{\mathcal{L}}^{-1*}) = \rho(V, \mathcal{L}) \setminus \{0\}$.

Now we are ready to establish a connection between the preresolvent matrices $A_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ and $\widetilde{A}_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ and the Weyl functions of the isometry $V_{\mathcal{L}}$.

Theorem 5. *Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary four of an isometry V and let $\mathcal{L}$ be a subspace in $\mathfrak{H}$, obeying condition (41). Then there exists a boundary four $\Pi' = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{L}, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{L}, \Gamma_0', \Gamma_1'\}$ of an isometry $V_{\mathcal{L}}$ such that the corresponding Weyl functions $M_{\pm}'(\cdot)$ coinside with preresolvent matrices of V, that is*

$$M_+'(\lambda) = \widetilde{A}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda), \quad l \in \mathbb{D}_0; \qquad M_-'(z) = A_{\Pi\mathcal{L}}(z), \quad z \in \mathbb{D}_1.$$

Finally, we find a connection between the resolvent matrices $W_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ and $\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ on the one hand and the characteristic operator functions of the linear relation $T_{\mathcal{L}}$ on the other hand.

Theorem 6. *Suppose that additionally to the assumptions of Theorem 5, $\dim \mathcal{L} = n_+$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}$ and $J_{\mathcal{L}}$ is the operator of the form (37). Moreover, assume that $B = -J_{\mathcal{L}}P$, where P is an orthoprojection in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{L}$ onto $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$. Then there exists a boundary four $\Pi_1 = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{L}, \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}, \Gamma_0'', \Gamma_1''\}$ of the isometry $V_{\mathcal{L}}$ such that $T_{\mathcal{L}} = \widetilde{A}_B \in As1(V_{\mathcal{L}})$ and CF $W_{T_{\mathcal{L}}}(\cdot)$ of the linear relation $T_{\mathcal{L}}$, corresponding to the V-colligation $\nu = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{L}, \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}, B; J_{\mathcal{L}}, -J_{\mathcal{L}}, \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}\}$, is connected with the $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrie $\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ by the equality*

$$\widetilde{W}_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \sqrt{2}\lambda W_{T_{\mathcal{L}}}(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{D}_0 \cap \rho(V, \mathcal{L}).$$

Theorem 7. *Let under the assumptions of Theorem 5 $\dim \mathcal{L} = n_-$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{L}$ and let $J_{L,\mathcal{H}_1} \in [L \oplus \mathcal{H}_1]$ be the operator (37). Then there exist a boundary four $\Pi_2 = \{\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{L}, \hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1\}$ of the isometry $V_{\mathcal{L}}$, a V-colligation of the second kind $\xi = \{\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{L}, \theta; N, -J_{L,\mathcal{H}_1}, L \oplus \mathcal{H}_1\}$ and a unitary operator $U \in [\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}]$ such that $T_{\mathcal{L}} = \widetilde{A}_{\theta} \in As2(V_{\mathcal{L}})$ and CF $\Omega_{T_{\mathcal{L}}}(\cdot)$ of the linear relation $T_{\mathcal{L}}$, corresponding to the V-colligation ξ, is connected with the $\Pi\mathcal{L}$-resolvent matrix $W_{\Pi\mathcal{L}}(\cdot)$ by the equality*

$$W_{\Pi\mathcal{L}}(\lambda) = \sqrt{2}\lambda U \Omega_{T_{\mathcal{L}}}(\lambda), \ \lambda \in (\mathbb{D}_1 \setminus \{0\}) \cap \rho(V, \mathcal{L}).$$

References

[1] D.Z. Arov, "Passive linear stationary dynamical systems", Sib. Mat. Zhurn., 20, No 2 (1979), 211-228.

[2] D.Z. Arov, L.Z. Grossman, "Scattering matrices in the theory of unitary extensions of isometric operators", Dokl. Acad. Nauk. SSSR, v.270, No 1 (1983), 17-20.

[3] D.Z. Arov , L.Z. Grossman, "Scattering matrices in the theory of unitary extensions of isometric operators", Math. Nachr. V. 157 (1992), 105-123.

[4] M. S. Brodskii, "Triangular and Jordan Representations of Linear operators", Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1971).

[5] V. A. Derkach and M. M. Malamud, "On Weyl function and Hermitian operators with gaps", Dokl. Acad. Nauk SSSR, v. 293, No 5 (1987), 1041-1046.

[6] V.A. Derkach and M.M. Malamud, "Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps", J. Funct. Anal., 95 (1991), 1-95.

[7] V. A. Derkach and M. M. Malamud, "Characteristic functions of almost solvable extensions of Hermitian operators", Ukr. Math. Zh., 44, No. 4 (1992), 435-459.

[8] V. A. Derkach and M. M. Malamud, "Inverse problems for Weyl functions, preresolvent and resolvent matrices of Hermitian operators", Russian Acad. Sci. Dokl. Math. v. 46, No 2 (1993), 190-197.

[9] V.A. Derkach and M.M. Malamud, "The extension theory of Hermitian operators and the moment problem", J. of Math. Sciences, 73, No.2 (1995), 141-242.

[10] L.Z. Grossman, "Theory of extensions of contractive operators and scattering matrices", Dokl. Acad. Sci. Ukraine, Ser. A, No 4 (1986), 9-13.

[11] V.E. Katsnelson, A.Ya. Heifits, P.M. Yuditskii, "Abstract interpolation problem in the extension theory of isometric operators", Operators in functional spaces and questions of function theory. Sbornik nauchnyh trudov, Kiev, 1987, 83-96 (Russian).

[12] M.G. Krein, "On Hermitian operator with defect index (1,1)", Dokl. Akad. Nauk SSSR, v. 43, No 8 (1944), 339-342.

[13] M.G. Krein, "On a remarkble class of Hermitian operator with defect index (1,1)", Dokl. Akad. Nauk SSSR, v. 44, No 5 (1944), 191-195.

[14] M.G. Krein, "On resolvents of Hermitian operator with defect number (m,m)", Dokl. Akad. Nauk SSSR, v. 52, No 8 (1946), 657-660.

[15] M.G. Krein and H. Langer, "On defect subspaces and generalized resolvents of Hermitian operator in Pontryagin space. I.", Funkts. Anal. i Prilozhen., 5, No 2 (1971), 59-71.

[16] M.G. Krein and H. Langer, "On defect subspaces and generalized resolvents of Hermitian operator in Pontryagin space. II.", Funkts. Anal. i Prilozhen., 5, No 3 (1971), 54-69.

[17] *Krein M., Langer H.* in Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai 5. Hilbert spaces operators. (Tihany 1970). North-Holland (Amsterdam-London). 1972. P. 353-399.

[18] M. G. Krein and Sh. N. Saakyan, "On some new results in the theory of resolvents of Hermitian operators", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 169, No.6 (1966), 1269-1272.

[19] M.G. Krein and Sh.N. Saakyan, "The resolvent matrix of a Hermitian operator and characteristic functions related to it ", Funkts. Anal. i Prilozhen., 4, No 3 (1970), 103-104.

[20] H. Langer, "On generalizad coresolvents of a π-isometric operator with unequal defect numbers", Funkts. Anal. i Prilozhen., 5, No 4 (1971), 73-75.

[21] H. Langer and P. Sorjonen, "Verallgemeinerte resolventen Hermitescher und isometrischer operatoren im Pontrjaginraum ", Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 561 (1974), 3-45.

[22] H. Langer and B. Textorius, Generalized Resolvents of Dual Pairs of Contractions, in: Invariant Subspaces and Other Topics, 6th Oper. Theory Conf. Proc., Birkhauser Verlag Basel, (1982), 103-118.

[23] M. M. Malamud, On the formula of generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator, Ukr. Mat. Zhurnal, Vol. 44, No 2 (1992), 1658-1688.

[24] M. M. Malamud and V. I. Mogilevskii, "Generalized resolvents of an isometric operator", Math. Notes, 73, No.3 (2003), 460-465.

[25] M. M. Malamud and V. I. Mogilevskii, "Resolvent matrices and spectral functions of an isometric operator", Russian Dokl. Acad. Sci., 395, No 1 (2004), 11-17.

[26] Yu. L. Shmul'yan, "Resolvent matrices of a symmetric operator", Matem. Issledovaniya, Kishinev, v. 8, No 4 (1973), 157-174 (in Russian).

Донецкий Национальный ун-т, Донецк, e-mail: mdm@dc.donetsk.ua

cp1251]inputenc T2A]fontenc

CONVERGENCES ALMOST EVERYWHERE IN $*$-ALGEBRAS OF LOCALLY MEASURABLE OPERATORS

M. A. Muratov
V. I. Vernadsky Tavricheskii National University,
Mathematics and Computer Science Department

Abstract
In this paper, we consider $*$-algebras $LS(M)$ of locally measurable operators affiliated to a von Neumann algebra M, and study different kinds of convergences in this algebras, the convergence almost everywhere and the convergence locally almost everywhere. We also study a relationship between these two convergences.

One of the first approaches to introduce a "noncommutative version" of the ring of measurable functions was suggested by I. Segal [1], who considered a *$*$-algebra $S(M)$ of measurable operators affiliated to a von Neumann algebra M*. Later, for purposes of noncommutative integration, one considered the $*$-subalgebras of $S(M)$, $S(M,\,\tau)$, of all τ-measurable operators associated with a faithful normal semi-finite trace τ on M, see, e.g., [2, 3, 4]. The algebras $S(M,\,\tau)$ and $S(M)$ are $*$-algebras of closed densely defined linear operators that act on a Hilbert space H the same for the von Neumann algebra M itself. In such a case, all these operators are affiliated to M and the algebraic operations for these $*$-algebras coincide with the operation of the "strong sum", the "strong product", passing to the adjoint, and the usual multiplication by scalars. The von Neumann algebra M is a $*$-subalgebra of $S(M,\,\tau)$ and $S(M)$, and coincides with the set of all bounded operators in $S(M,\,\tau)$ and $S(M)$. A more general class of $*$-algebras of closed operators that act on a Hilbert space H and that are affiliated to a von Neumann algebra M was introduced by Dixon in [5] who called them EW^*-algebras. In addition to the mentioned above $*$-algebras $S(M)$ and $S(M,\,\tau)$, *$*$-algebras $LS(M)$ of locally measurable operators affiliated to M* are also EW^*-algebras [6, 7]. B. S. Zakirov and V. I. Chilin have shown in [8] that any EW^*-algebra $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A}\bigcap\mathcal{B}(H)=M$, where $\mathcal{B}(H)$ is the algebra of all bounded linear operators acting on H, is a $*$-subalgebra of $LS(M)$. This explains uniqueness of the $*$-algebra $LS(M)$ for a von Neumann algebra M in the class of EW^*-algebras.

In this paper, we consider $*$-algebras $LS(M)$, study different types of convergence in these algebras, i.e., convergences almost everywhere and locally almost everywhere, and study a relationship between these two convergences.

We employ the terminology and notations used in the theory of von Neumann algebras [9, 10] and the theory of measurable operators [1, 3, 4, 7].

1. Preliminaries

Let H be a Hilbert space, $\mathcal{B}(H)$ the algebra of all bounded operators acting on H, M a von Neumann algebra in $\mathcal{B}(H)$, $P(M)$ the complete lattice of all orthogonal projections in M.

A linear space D in H is called *affiliated to* M, denoted by $D\,\eta\,M$, if $U(D) \subset D$ for any unitary operator U from the commutant

$$M' = \{S \in \mathcal{B}(H) :\ ST = TS\ \forall\ T \in M\}$$

of the von Neumann algebra M. If D is a closed subspace of H and P_D is an operator of the orthogonal projection onto D, then $D\,\eta\,M$ if and only if $P_D \in P(M)$.

A linear operator T that acts on a Hilbert space H and has domain $D(T)$ is called *affiliated to* M, denoted by $T\,\eta\,M$, if $U(D(T)) \subset D(T)$ for any unitary operator U in the commutant M' and $UT\xi = TU\xi$ for all $\xi \in D(T)$. It is clear that if $T \in \mathcal{B}(H)$ and $T\,\eta\,M$, then $T \in M$.

A closed linear operator T with domain $D(T) \subset H$ is called *measurable with respect to a von Neumann algebra* M [1], if $T\,\eta\,M$ and there exists a sequence of projections, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, such that $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset D(T)$, and $P_n^{\perp} = I - P_n$ is a finite projection in M for all $n = 1, 2, \ldots$, where I is the identity in the von Neumann algebra M.

Denote by $S(M)$ the set of all linear operators on H, measurable with respect to the von Neumann algebra M. $S(M)$ is a $*$-algebra over the field $\mathbf{C}$ with identity I, the operations of strong addition, strong multiplication, and passing to the adjoint.

Here, M is a $*$-subalgebra of $S(M)$. In what follows, the strong sum and the strong product of operators T and S will be denoted in the same way as the usual operations, by $T + S$ and TS.

If T is a closed linear operator with the domain dense in H and $T = U|T|$ is the polar decomposition of the operator T, where $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ is the absolute value of T and U is the corresponding partial isometry, then $T \in S(M)$ if and only if $U \in M$ and $|T| \in S(M)$ [7]. The following proposition gives a convenient criterion for a closed operator T to be measurable in terms of the spectral family for $|T|$.

Proposition 1 ([7])**.** Let T be a closed operator on H, $T\,\eta\,M$, $T = U|T|$ the polar decomposition of T, $\{E_\lambda\}$ the spectral family of projections for $|T|$, $\lambda \in \mathbf{R}$, where $\mathbf{R}$ is the field of real numbers. Then $U \in M$ and $E_\lambda \in P(M)$ for all $\lambda \in \mathbf{R}$. Also, $T \in S(M)$ if and only if the domain $D(T)$ of the operator T is dense in H and $E_\lambda^{\perp}$ is a finite projection for some $\lambda > 0$. □

To prove Proposition 1, one uses the following lemma in an essential way. This lemma will be used later.

Lemma 1 ([7])**.** *Let T be a closed operator on H with dense domain $D(T)$, $T\,\eta\,M$, and $\{E_\lambda\}$ be the spectral family of projections for $|T|$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. If $P \in P(M)$, $P(H) \subseteq D(T)$, $TP \in \mathcal{B}(H)$, and $\|TP\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \lambda$, then $E_\lambda^{\perp} \precsim P^{\perp}$ (recall that the relation $E \precsim Q$ for projections $E, Q \in P(M)$ means that $E \sim E_1 \leqslant Q$, and the equivalence of projections, $E \sim E_1$, is equivalent to existence of a partial isometry $V \in M$ such that $V^*V = E_1$ and $VV^* = E$.)* □

It directly follows from Proposition 1 that, in the case where M is a type III von Neumann algebra or M is a type I factor, we always have $S(M) = M$. For von Neumann algebras of type II, the latter identity is not true already. The proof of this fact is based on the following proposition.

Proposition 2 ([11])**.** If there exists an increasing sequence of projections $\{E_n\}$ in M such that $E = \sup_{n \geqslant 1} E_n$ is a finite projection, and $E_n \neq E$ for all $n = 1, 2, \ldots$, then $S(M) \neq M$. □

Corollary 1. *If M is a von Neumann algebra of type II, then $S(M) \neq M$.* □

The following proposition gives conditions that are necessary and sufficient for $*$-algebras $S(M)$ and M to coincide.

Proposition 3 ([11])**.** The following statements are equivalent.

(i) $S(M) = M$.

(ii) M can be represented as a direct sum, $M = \sum_{n=0}^{m} M_n$, where M_0 is a von Neumann algebra of type III, and M_n are factors of type I, $n = 1, 2, \ldots, m$, and m is a natural number (some terms could be omitted.)

□

A closed linear operator T acting on a Hilbert space H is called *locally measurable with respect to a von Neumann algebra M* if $T \eta M$ and there exists a sequence $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ of central projections in M such that $Z_n \uparrow I$ and $TZ_n \in S(M)$ for all $n = 1, 2, \ldots$ [7].

Denote by $LS(M)$ the set of all linear operators that are locally measurable with respect to M. It was proved in [7] that $LS(M)$ is a $*$-algebra over the field $\mathbf{C}$ with identity I, the operations of strong addition, strong multiplication, and passing to the adjoint (the multiplication by a scalar is defined as usual with the assumption $0 * T = 0$.) In such a case, $S(M)$ is a $*$-subalgebra in $LS(M)$. In the case where M is a finite von Neumann algebra or a factor, the algebras $S(M)$ and $LS(M)$ coincide. This is not true in the general case. The following proposition gives a sufficient condition for these algebras to be distinct.

Proposition 4 ([11])**.** If a von Neumann algebra M contains a sequence $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ of central projections, increasing to the identity, such that $(I - Z_n)$ is not a finite projection, $n = 1, 2, \ldots$, then $LS(M) \neq S(M)$. □

Proposition 4 gives at once the following.

Corollary 2. *If a von Neumann algebra M is a direct product of an infinite number of von Neumann algebras that are not finite, then $LS(M) \neq S(M)$.* □

The following proposition gives a criterion for the $*$-algebras $LS(M)$ and $S(M)$ to coincide.

Proposition 5 ([11])**.** The following statements are equivalent.

(i) $LS(M) = S(M)$.

(ii) M can be represented as a direct sum, $M = \sum_{n=0}^{m} M_n$, where M_0 is a finite von Neumann algebra and M_n are factors of type I_∞, II_∞, III, $n = 1, 2, \ldots, m$, and m is a natural number (some terms could be omitted.)

□

We recall one more important property of the $*$-algebras $LS(M)$.

Proposition 6 ([12])**.** Let a von Neumann algebra M be a C^*-product of von Neumann algebras M_i, $i \in I$, where I is a family of indices, that is, $M = \{\{T_i\}_{i\in I},\ T_i \in M_i,\ i \in I,\ \sup_{i\in I} \|T_i\|_{M_i} < \infty\}$ with the coordinate-wise algebraic operations and involution and the C^*-norm, $\|\{T_i\}_{i\in I}\|_M = \sup_{i\in I} \|T_i\|_{M_i}$. Then the $*$-algebra $LS(M)$ is $*$-isomorphic to the $*$-algebra $\prod_{i\in I} LS(M_i)$ (the algebraic operations and the involution in $\prod_{i\in I} LS(M_i)$ are coordinate-wise.) □

Let us remark that there is no an analogue of Proposition 6 for the algebras $S(M)$. Indeed, let M_n be type III factors, $n = 1, 2, \ldots$, and M be their C^*-product. Then $S(M) = M$ and $LS(M_n) = S(M_n) = M_n$ for all $n = 1, 2, \ldots$. Moreover, by Corollary 2, $LS(M) \neq S(M) = M$. Hence, in virtue of Proposition 6,

$$\prod_{n=1}^{\infty} S(M_n) = \prod_{n=1}^{\infty} LS(M_n) = LS(M) \neq S(M).$$

The following proposition gives necessary and sufficient conditions for the $*$-algebras $LS(M)$ and M to coincide.

Proposition 7 ([11])**.** The following statements are equivalent.

(i) $LS(M) = M$.

(ii) M can be represented as a direct sum, $M = \sum\limits_{n=1}^{m} M_n$, where M_n are type I or type III-factors, $n = 1, 2, \dots, m$, and m is an integer (some terms could be absent.)

□

2. Convergences almost everywhere and locally almost everywhere in the $*$-algebra $LS(M)$.

Let M be an arbitrary von Neumann algebra, $P_f(M)$ a sublattice in $P(M)$ of all finite projections in M.

Definition 1 ([1])**.** A sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset LS(M)$ *converges almost everywhere* to $T \in LS(M)$, denoted by $T_n \xrightarrow{\text{a.e.}} T$, if for any $\varepsilon > 0$ there exists a subsequence $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ such that $E_n \uparrow I$, $E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T)E_n \in M$ and $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ for all $n = 1, 2, \dots$.

Let M be a commutative von Neumann algebra. Then, as known [13, Part 1, Chapter 7], there exists a measurable space (Ω, Σ, μ) with a finite locally complete measure μ such that M is $*$-isomorphic to the $*$-algebra $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. In this case, the algebra $LS(M) = S(M)$ is $*$-isomorphic to the $*$-algebra $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ of all measurable complex-valued functions defined on (Ω, Σ, μ) (the functions that are equal almost everywhere are considered as identical) [1]. The introduced convergence almost everywhere coincides with the convergence almost everywhere with respect to the measure μ in the sense of the measure theory.

It is clear that if $T_n, T \in M$ and $\|T_n - T\|_M \longrightarrow 0$, then $T_n \xrightarrow{\text{a.e.}} T$. The following proposition gives a sufficient condition so that the converse statement holds.

Proposition 8. Let a von Neumann algebra M be given as a direct sum, $M = \sum\limits_{i=0}^{m} M_i$, where M_0 is a von Neumann algebra of type III, M_i are type I factors, $i = 1, ..., m$, and m is a natural (some terms could be absent.) If $T_n, T \in LS(M)$ and $T_n \xrightarrow{\text{a.e.}} T$, then $(T_n - T) \in M$ starting with some index, and $\|T_n - T\|_M \longrightarrow 0$ for $n \to \infty$.

Доказательство. Any finite projection E in $P(M)$ has the form $E = \sum_{j=1}^{k} P_j$, where P_j are atoms in $P(M)$, $j = 1, 2, \dots, k$, that is, the reduced von Neumann algebras $P_j M P_j$ are one-dimensional. So, if $Q_n \in P_f(M)$ and $Q_n \downarrow 0$, then $Q_n = 0$ starting with some index n_0. This, together with the definition of convergence almost everywhere, imply that $(T_n - T) \in M$ for $n \geq n_0$ and $\|T_n - T\|_M \longrightarrow 0$ as $n \to \infty$. □

Consider an arbitrary von Neumann algebra of type III, M, such that its center $Z(M)$ does not have atoms. Then the $*$-algebra $LS(Z(M)) = S(Z(M))$ is $*$-isomorphic to the $*$-algebra $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ for a corresponding measurable space with a locally finite continuous measure μ. If $T_n, T \in LS(Z(M)) \subset LS(M)$, $T_n \xrightarrow{\text{a.e.}} T$ in $LS(M)$, then by Proposition 8, $(T_n - T) \in Z(M)$ starting with some index, and $\|T_n - T\|_{Z(M)} = \|T_n - T\|_M \longrightarrow 0$ as $n \to \infty$.

Since the measure μ is continuous, there exist $T_n, T \in S(Z(M))$ such that $T_n \to T$ almost everywhere with respect to μ, but $(T_n - T)$ does not belong to M for all $n = 1, 2, \dots$. This means that convergence of T_n almost everywhere to T in $LS(Z(M))$ does not imply in general the convergence almost everywhere in $LS(M)$.

In this connection, it is natural to modify the notion of convergence almost everywhere in $LS(M)$ so that this convergence would induce the convergence almost everywhere in $LS(Z(M))$.

Definition 2 ([7])**.** We will call a sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $LS(M)$ convergent *locally almost everywhere* to $T \in LS(M)$), denoted by $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$, if for any $\varepsilon > 0$ there exist sequences

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ and $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ such that $E_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Z_n E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T)E_n \in M$ and $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ for all $n = 1, 2, \ldots$.

It is clear that the convergence $T_n \xrightarrow{\text{a.e.}} T$ implies the convergence $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$ (it is sufficient to take $Z_n = I$, $n = 1, 2, \ldots$.) Moreover, it is clear that if M is a factor or a finite von Neumann algebra, convergences almost everywhere and locally almost everywhere coincide. The following theorem gives a relation between convergences almost everywhere and locally almost everywhere for an arbitrary von Neumann algebra M.

Theorem 1. *Let M be an arbitrary von Neumann algebra, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, T in $LS(M)$. The following conditions are equivalent:*

(i) $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$;
(ii) *there exists a sequence of pairwise orthogonal central projections $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ such that $\sum_{m=1}^{\infty} P_m = I$ and $T_n P_m \xrightarrow{\text{a.e.}} TP_m$, as $n \to \infty$, for each fixed $m = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Let $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$, $\varepsilon > 0$ and the projections $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, and $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ be such that $E_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Z_n E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T)E_n \in M$ and $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ for all $n = 1, 2, \ldots$.

Let $P_1 = Z_1$, $P_m = Z_m - Z_{m-1}$ for $m \geq 2$.

It is clear that $\{P_m\}_{m=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, $\sum_{m=1}^{\infty} P_m = \sup_{m \geqslant 1} Z_m = I$.

Fix m and set $Q_{nm} = E_n P_m + P_m^{\perp}$ for $n \geqslant m$ and $Q_{nm} = 0$ if $n < m$. Then $Q_{nm} \uparrow I$ for $n \to \infty$ and

$$Q_{nm}^{\perp} = I - (E_n P_m + P_m^{\perp}) = P_m - E_n P_m = E_n^{\perp} P_m = (E_n^{\perp} Z_n) P_m \in P_f(M)$$

for $n \geqslant m$. Moreover,

$$(T_n P_m - TP_m) Q_{nm} = (T_n - T) P_m Q_{nm} = (T_n - T) E_n P_m \in M$$

and $\|(T_n P_m - TP_m) Q_{nm}\| < \varepsilon$. This means that $T_n P_m \xrightarrow{\text{a.e.}} TP_m$, as $n \to \infty$, for each fixed $m = 1, 2, \ldots$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Let $\{P_m\}_{m=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, $P_m P_n = 0$ for $m \neq n$, $\sum_{m=1}^{\infty} P_m = I$ and $T_n P_m \xrightarrow{\text{a.e.}} TP_m$ as $n \to \infty$ for each fixed $m = 1, 2, \ldots$. Then, for each $\varepsilon > 0$ there is a sequence $\{E_{nm}\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ such that $E_{nm} \uparrow I$ for $n \to \infty$, $E_{nm}^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T) P_m E_{nm} \in M$ and $\|(T_n - T) P_m E_{nm}\|_M < \varepsilon$ for all $n, m = 1, 2, \ldots$.

Set $Z_n = \sum_{m=1}^{n} P_m$ and $Q_n = \sum_{m=1}^{n} E_{nm} P_m$.

Then $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, $Z_n \uparrow I$, $Q_n \uparrow I$, $Q_n^{\perp} Z_n = \sum_{m=1}^{n} E_{nm}^{\perp} P_m \in P_f(M)$, $(T_n - T) Q_n = \sum_{m=1}^{n} (T_n - T) E_{nm} P_m \in M$ and, since $(T_n - T) E_{nm} P_m$ are pairwise orthogonal for fixed n, we have

$$\|(T_n - T) Q_n\|_M = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \|(T_n - T) E_{nm} P_m\|_M < \varepsilon.$$

Consequently, $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$. □

Let us find a class of von Neumann algebras for which the convergences almost everywhere and locally almost everywhere coincide.

Theorem 2. *The following conditions are equivalent.*

(i) *Every sequence in $LS(M)$, which is convergent locally almost everywhere, is convergent in $LS(M)$ almost everywhere.*
(ii) *The von Neumann algebra M can be represented as a direct sum, $M = \sum_{i=0}^{m} M_i$, where M_0 is a finite von Neumann algebra, and M_i are factors of type I_∞, II_∞, or III, $i = 1, 2, \ldots, m$, and m is a natural number (some terms could be missed.)*

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Assume that M is not a finite von Neumann algebra and choose a central projection $Q \in Z(M)$ such that $M_0 = Q^{\perp}M$ is a finite von Neumann algebra and QM is a properly infinite von Neumann algebra (it can happen that $Q = I$.) Let us show that the center $Z(QM) = QZ(M)$ is a finite dimensional von Neumann algebra.

If this is not the case, then there exists a subsequence $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(QZ(M))$ such that $Z_n \uparrow Q$ and $Z_n \neq Q$ for all $n = 1, 2, \ldots$. Then it is clear that $Z_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} Q$ in $LS(M)$ and by (i) we have that $Z_n \xrightarrow{\text{a.e.}} Q$ in $LS(M)$. Hence, there exists a sequence $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ such that $E_n \uparrow I$, $E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(Z_n - Q)E_n \in M$ and $\|(Z_n - Q)E_n\|_M < \varepsilon = \frac{1}{2}$ for all $n = 1, 2, \ldots$.

Since $Q - Z_n = Z_n^{\perp}Q$, we see that $(Q - Z_n)E_n = Z_n^{\perp}QE_n$ is a projection such that $\|Z_n^{\perp}QE_n\| < \frac{1}{2}$. Consequently, $Z_n^{\perp}QE_n = 0$ and, hence, $Z_n^{\perp}Q \leqslant E_n^{\perp}$. This means that $Q - Z_n = Z_n^{\perp}Q$ is a nonzero finite projection in QM, which contradicts that the von Neumann algebra QM is properly infinite.

Consequently, the algebra $QZ(M)$ is finite dimensional, that is there exist atoms $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ in $P(QZ(M))$ such that $\sum_{i=1}^{m} Q_i = I$ and $M_i = Q_iM$ are not finite factors, i.e., they are not factors of types I_{∞}, II_{∞}, or III. Hence, M is a direct sum, $\sum_{i=0}^{m} M_i$, where $M_0 = Q^{\perp}M$ is a finite von Neumann algebra, and $M_i = Q_iM$ are factors of the above types.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Assume that the von Neumann algebra M can be represented as the direct sum $M = \sum_{i=0}^{m} M_i$, where M_0, M_i, $i = 1, 2, \ldots$, are the same as in (ii). By Proposition 6,

$$LS(M) = LS(M_0) \bigoplus \sum_{i=1}^{m} LS(M_i).$$

Denote by Q_i the identity element in the von Neumann algebra M_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$. Let $T_n, T \in LS(M)$ and $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$ in $LS(M)$ as $n \to \infty$. Then $T_nQ_i \xrightarrow{\text{l.a.e.}} TQ_i$ in $LS(M_i)$ as $n \to \infty$ for any fixed $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Since M_0 is a finite von Neumann algebra and M_i are factors, we have that $T_nQ_i \xrightarrow{\text{a.e.}} TQ_i$ in $LS(M_i)$ as $n \to \infty$. Since $Q_i \in P(Z(M))$, we see that $T_nQ_i \xrightarrow{\text{a.e.}} TQ_i$ in $LS(M)$ as $n \to \infty$. By Theorem 1, $T_n \xrightarrow{\text{a.e.}} T$ in $LS(M)$. $\square$

Remark 8. Let a von Neumann algebra M be represented as a C^*-product, $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$, where M_i are factors of types I_{∞}, II_{∞}, or III, $i = 1, 2, \ldots$. Then, by Theorem 2, the convergences locally almost everywhere and almost everywhere do not coincide in $LS(M)$. In particular, there are von Neumann algebras of countable type for which these convergences do not coincide (recall that a von Neumann algebra M is of a finite type if any family of nonzero pairwise orthogonal projections in $P(M)$ is at most countable.)

Remark 9. Let M be a factor of type I or III (in this case $LS(M) = M$), $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, T in M and $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$. Then, for each $\varepsilon > 0$ there exists a sequence $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ such that $E_n \uparrow I$, $E_n^{\perp} \in P_f(M)$ (that is, $E_n^{\perp} = 0$ starting with some index n_0), $(T_n - T)E_n \in M$ and $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ (i.e., $\|T_n - T\| < \varepsilon$ as $n \geqslant n_0$.) This means that convergence locally almost everywhere coincides with the uniform convergence.

Proposition 9. Let $T_n, T \in S(Z(M))$. The following conditions are equivalent.

(i) $T_n \xrightarrow{\text{l.a.e.}} T$ in $LS(M)$;
(ii) $T_n \longrightarrow T$ almost everywhere in $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ (the $*$-algebra $S(Z(M))$ is identified with the $*$-algebra $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ and the center $Z(M)$ with the $*$-algebra $L_{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$.)

Let M be an arbitrary commutative von Neumann algebra. Then as was noted above, there exists a measurable space (Ω, Σ, μ) with a locally finite complete measure μ such that M is $*$-isomorphic to the $*$-algebra $L_{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ and the $*$-algebra $LS(M) = S(M)$ is $*$-isomorphic to the $*$-algebra $S(\Omega, \Sigma, \mu)$. So, together with a well-known convergence in $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ with respect to measure, we also consider the convergence locally with respect to measure. This convergence is defined as follows: a sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\Omega, \Sigma, \mu)$ *converges locally with respect to measure* to $f \in S(\Omega, \Sigma, \mu)$ as $n \to \infty$ if $f_n\chi_A \longrightarrow f\chi_A$ with respect to measure for any set $A \in \Sigma$ with $\mu(A) < \infty$, where χ_A is a characteristic function of the set A.

A similar convergence can be also defined in the algebra $LS(M)$ in the case of an arbitrary von Neumann algebra M.

Denote by φ a $*$-isomorphism of the center $Z(M)$ of the von Neumann algebra M to the $*$-algebra $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ and by $S_\infty^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ the set of all measurable functions $f:\ \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ (functions that are equal almost everywhere are identified.) It was shown in [1] that there exists a mapping

$$d:\ P(M) \longrightarrow S_\infty^+(\Omega, \Sigma, \mu)$$

such that

(i) $d(P) = 0$ if and only if $P = 0$;
(ii) $d(P)$ is finite almost everywhere if and only if the projection P is finite;
(iii) $d(P + Q) = d(P) + d(Q)$ if $PQ = 0$;
(iv) $d(U^*U) = d(UU^*)$ for any partial isometry $U \in M$;
(v) $d(ZP) = \varphi(Z)d(P)$ for all $Z \in P(Z(M))$ and $P \in P(M)$;
(vi) if $P_\alpha,\ P \in P(M)$ and $P_\alpha \uparrow P$, then $d(P) = \sup_\alpha d(P_\alpha)$.

A mapping $d:\ P(M) \longrightarrow S_\infty^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ satisfying the properties (i)—(vi) is called a dimension function on $P(M)$.

For each $\varepsilon > 0$ and $A \in \Sigma$ satisfying $\mu(A) < \infty$, we set

$$\begin{aligned} V(A, \varepsilon) = \{T \in LS(M):\ &\text{there exists } P \in P(M) \text{ such that } TP \in M,\\ &\|TP\|_M < \varepsilon,\ \text{and } \mu(A \cap \{\omega \in \Omega:\ d(P^\perp)(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Theorem 3 ([7]). (i) *The system of the sets*

$$\{\{T + V(A, \varepsilon)\}:\ T \in LS(M),\ \varepsilon > 0,\ A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty\} \tag{1}$$

defines in $LS(M)$ a Hausdorff vector topology t for which sets (1) *form a base of neighborhoods of the operator $T \in LS(M)$.*

(ii) *$(LS(M), t)$ is a complete uniform space with respect to the dimension induced by the topology t.*

(iii) *The involution is continuous, and the multiplication in $(LS(M), t)$ is continuous in the totality of the variables (that is $(LS(M), t)$ is a topological $*$-algebra.)*

(iv) *The topology t is metrizable if and only if the Boolean algebra $P(Z(M))$ is of countable type, that is, any family of nonzero pairwise orthogonal projections in $P(Z(M))$ is at most countable.*

(v) *If $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J},\ T \subset LS(M)$, then the net T_α converges to T in the topology t (denoted by $T_\alpha \xrightarrow{t} T$) if and only if $E_\lambda^\perp(|T_\alpha - T|) \xrightarrow{t} 0$ for any $\lambda > 0$, where $\{E_\lambda(|T_\alpha - T|)\}$ is a spectral family of projections for $|T_\alpha - T|$. In particular, $T_\alpha \xrightarrow{t} T \iff |T_\alpha - T| \xrightarrow{t} 0$.*

(vi) *If $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$, then $P_n \xrightarrow{t} 0$ if and only if $\chi_A d(P_n) \longrightarrow 0$ with respect to the measure μ for each $A \in \Sigma$ with $\mu(A) < \infty$.*

□

It was found in [7] that the topology t does not change if the measure μ is replaced with an equivalent measure and the dimension function d with another dimension function.

Convergence in the topology t is called a *convergence locally in measure.*

It follows from the definition of the topology t that the convergence of a net $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ to T locally in measure means that for any $\varepsilon > 0$ and $A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty$, there exists $\alpha_0 = \alpha(\varepsilon, A)$ such that, for each $\alpha \geq \alpha_0$, there exists a projection $P(\alpha) \in P(M)$ satisfying

$$\|(T_\alpha - T)P(\alpha)\|_M < \varepsilon \tag{2}$$

and

$$\mu(A \cap \{\omega \in \Omega : \ d(I - P(\alpha))(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon. \tag{3}$$

If inequality (2) is replaced with the inequality

$$\|P(\alpha)(T_\alpha - T)P(\alpha)\|_M < \varepsilon, \tag{2'}$$

then it is said that the net $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *converges to* T *two-side locally in measure.*

It is easy to see that the two-side convergence in measure is equivalent to the convergence in the vector topology in $LS(M)$, with the base of neighborhoods of zero formed by the sets

$$\begin{aligned} W(A, \varepsilon) = \{T \in LS(M) : \ &\text{there exists } P \in P(M) \\ &\text{such that } PTP \in M, \ \|PTP\|_M < \varepsilon \\ &\text{and } \mu(A \cap \{\omega \in \Omega : \ d(P^\perp)(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon\}, \\ &\text{where } \varepsilon > 0, \ A \in \Sigma, \ \mu(A) < \infty. \end{aligned}$$

In fact, this vector topology coincides with the topology t, which is directly implied by the following proposition.

Proposition 10 ([11])**.**

$$V(A, \varepsilon) \subset W(A, \varepsilon) \subset V(A, 2\varepsilon)$$

for any $\varepsilon > 0$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$.

If there exists a faithful normal semi-final trace τ on a von Neumann algebra M, then, for the $*$-algebra $LS(M)$, one can consider convergence in measure induced by the trace τ, see, e.g. [2, 3]. This convergence coincides with the convergence in the vector topology t_τ in $LS(M)$, with a base of neighborhoods of zero formed by the sets

$$\begin{aligned} V(\varepsilon, \delta) = \{T \in LS(M) : \ &\text{there exists } P \in P(M) \\ &\text{such that } TP \in M, \ \|TP\|_M < \varepsilon, \tau(P^\perp) < \delta\}, \end{aligned}$$

where ε, $\delta > 0$.

Proposition 11 ([11])**.** Let τ be a faithful normal semi-finite trace on a von Neumann algebra M. Then we have the following.

(i) If $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$ and $\tau(E_n) \longrightarrow 0$, then $E_n \xrightarrow{t} 0$. Conversely, if $E_n \xrightarrow{t} 0$ and $\tau(I) < \infty$, then $\tau(E_n) \longrightarrow 0$.

(ii) If $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, $T \subset LS(M)$ and $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$, then $T_n \xrightarrow{t} T$.

(iii) If $\tau(I) < \infty$, then the topologies t and t_τ coincide.

Remark 10. If the trace τ is not finite, then the convergence $T_n \xrightarrow{t} T$, in general, does not imply the convergence $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$ even for commutative von Neumann algebras.

Example 1. Consider the von Neumann algebra

$$M = l_\infty = \{\{c_n\}_{n=1}^\infty : \ c_n \in \mathbf{C}, n = 1, 2, \ldots, \sup_{n \geq 1} |c_n| < \infty\}.$$

Set $\tau(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^\infty c_n$ and $\tau_1(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} c_n$, where $\{c_n\} \in l_\infty, c_n \geq 0$.

Then τ is a faithful normal trace on M that is semi-finite but not finite, and τ_1 is a faithful normal finite trace on M.

Consider a sequence of projections, $E_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 1, \ldots)$, in l_∞, converging to zero. Then $\tau_1(E_n) = \sum_{k=n+1}^\infty 2^{-k} = 2^{-n} \to 0$ as $n \to \infty$ and, by Proposition 11(i), $E_n \xrightarrow{t} 0$.

However, $\tau(\{E_n > \frac{1}{2}\}) = +\infty$ for all $n = 1, 2, \ldots$, and so $E_n \overset{t_\tau}{\nrightarrow} 0$. $\square$

Remark 11. Let M be a factor. Then $Z(M) = \mathbf{C} = L_\infty(\{\omega\}, \Sigma, \mu)$, where $\Sigma = \{\emptyset, \{\omega\}\}$, $\mu(\{\omega\}) = 1$. In this case, the dimension function d is a faithful normal semi-finite (finite) trace on M if M is of type I_∞, II_∞ (correspondingly, I_n, II_1), and $d(E) = +\infty$ for all nonzero $E \in P(M)$ if M is of type III.

So, if $\varepsilon \in (0,1)$, $A = \{\omega\}$, we have that

$$V(A, \varepsilon) = \{T \in LS(M) : \text{ there exists } P \in P(M) \text{ such that } TP \in M, \quad \|TP\|_M < \varepsilon, \text{ and } d(P^\perp) < \varepsilon\}.$$

In other words, if M is of type III, then

$$V(A, \varepsilon) = \{T \in M : \|T\|_M < \varepsilon\},$$

that is the convergence locally in measure coincides with uniform convergence, and if M is of type I or II, then convergence locally in measure coincides with convergence in measure induced by the trace d.

Remark 12. If $M = \mathcal{B}(H)$ is a factor of type I, then convergence locally in measure coincides with uniform convergence.

Indeed, let $\tau = tr$ be the canonical trace on $\mathcal{B}(H)$, T_n, $T \in \mathcal{B}(H)$, and $T_n \xrightarrow{t} T$ (note that, by Proposition 7, $LS(M) = S(M) = M = \mathcal{B}(H)$.)

By Theorem 3 (v), (vi), we have that $tr(E_\lambda^\perp(|T_n - T|)) \longrightarrow 0$ as $n \to \infty$ for any $\lambda > 0$. Consequently, $E_\lambda^\perp(|T_n - T|) = 0$ starting with some index $n(\lambda)$. This means that $\|T_n - T\|_M = \||T_n - T|\|_M \leq \lambda$ for $n \geq n(\lambda)$, that is, $\|T_n - T\|_M \longrightarrow 0$ as $n \to \infty$.

Remark 13. If T_n, $T \in S(Z(M))$, then $T_n \xrightarrow{t} T$ if and only if $T_n \longrightarrow T$ in the measure μ for each $A \in \Sigma$ with $\mu(A) < \infty$ (we identify $S(Z(M))$ with the $*$-algebra $S(\Omega, \Sigma\ \mu)$.)

Indeed, if $\{E_\lambda(|T_n - T|)\}$ is a spectral family of projections for the operator $|T_n - T|$, then by Theorem 3 (v), $T_n \xrightarrow{t} T$ if and only if $E_\lambda^\perp(|T_n - T|) \xrightarrow{t} 0$ for any $\lambda > 0$. Since $T_n, T \in S(Z(M))$, we have that $E_\lambda(|T_n - T|) \in P(Z(M))$ for all $\lambda > 0$. By Theorem 3 (vi), $E_\lambda^\perp(|T_n - T|) \xrightarrow{t} 0$ if and only if $\chi_A E_\lambda^\perp(|T_n - T|)d(I) = \chi_A d(E_\lambda^\perp(|T_n - T|)) \longrightarrow 0$ in the measure μ for each $A \in \Sigma$ with $\mu(A) < \infty$, where we identify $Z(M)$ with the $*$-algebra $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ (see the definition of the dimension function d.)

Consequently, $T_n \xrightarrow{t} T$ if and only if $E_\lambda^\perp(|T_n - T|)$ converges to zero in the measure μ for each $A \in \Sigma$ with $\mu(A) < \infty$ for all $\lambda > 0$. The latter condition, clearly, is equivalent to the convergence $T_n \longrightarrow T$ in the measure μ for each $A \in \Sigma$ with $\mu(A) < \infty$.

The following theorem gives a criterion for the convergences locally almost everywhere and locally in measure to coincide in $LS(M)$.

Theorem 4. *The following conditions are equivalent.*

(i) *For $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ and T in $LS(M)$, $T_n \xrightarrow{l.a.e.} T$ if and only if $T_n \xrightarrow{t} T$.*
(ii) *The von Neumann algebra M can be represented as a C^*-product, $M = \prod_{i \in J} M_i$, where M_i are factors of types I or III, $i \in J$, and J is an index set.*

References

[1] Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. - 1953.- N 57.- P. 401–457.
[2] Nelson E. Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal.- 1974.- N 15.- P. 103–116.
[3] Yeadon F. J. Non-commutative L^P-spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.- 1975.- N 77.- P. 91–102.
[4] Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math.- 1986.- V. 123.- P. 269–300.
[5] Dixon P.G. Unbounded operator algebras // Proc. London Math. Soc., - 1971. - V. 23, No 3.- P.53–59.
[6] Sankaran S. The $*$-algebra of unbounded operators // J. London Math. Soc., No. 34, 337–344 (1959).

[7] Yeadon F. J. Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc.- 1973.- N 74.- P. 257–268.
[8] Zakhirov B. S., Chilin V. I. An abstract characterization of EW^*-algebras. // Funktsional'nyi analiz i ego Prilozheniya. - 1991.- v. 25, No. 1.- p. 76-78. (Russian)
[9] Stratila S., Zsido L. Lectures on von Neumann algebras.- England Abacus Press, 1975.- 478 p.
[10] Takesaki M. Theory of operator algebras I.- New York: Springer, 1979.- 415 p.
[11] Muratov M. A., Chilin V. I. Convergence in $*$-algebras of locally measurable operators. // Tavricheskii Vestnik Informatiki i Matematiki, N 2, 2004 (in print). (Russian)
[12] Saito K. On the algebra of measurable operators for a general AW^*-algebra, II // Tohoku. Math. J.- 1971.- V. 23.- P. 525–534.
[13] Dixmier J. Les algebras d'operateurs dans l'espace Hilbertin (Algebres de von Neumann).- Paris: 2ed. ed. Gauthier-Villars , 1969.- 367 p.
[14] M. A. Muratov Order properties of convergent sequences of unbounded measurable operators affiliated to a finite von Neumann algebra // Methods Funct. Anal. Topology -2002.-. **8**, N 3.- P. 50-60.

pr. Vernadskogo, 4, Simferopol', Crimea, Ukraine, 95007

E-mail: kromsh@crimea.com

ON SIMILARITY OF CONVOLUTION VOLTERRA OPERATORS IN THE SOBOLEV SPACES

G. S. Romashchenko
Donetsk State University of Management
Donetsk, Ukraine

A criterion for a pair of convolution Volterra operators K_i on $W_p^m[0,1]$ with kernels from the Liouville-Sobolev spaces $W_p^{\alpha_i+m-2}[0,1]$ $(i=1,2)$ to be simultaneously similar to powers of the operator of integration J is obtained. Simultaneous similarity means that there exists an automorphism S on $W_p^m[0,1]$ such that $S^{-1}K_iS = J^{\alpha_i}$. The proof of the main result involves a careful analysis of fractional powers of weak positive type convolution Volterra operators.

1. Introduction.

Consider a convolution Volterra operator K on the Sobolev space $W_p^m[0,1]$ $m \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [1,+\infty]$ defined by

$$K : f \to \int_0^x K(x-t)f(t)\,dt \tag{1}$$

with a kernel $K(\cdot) \in W_p^{m-1}[0,1]$. The simplest Volterra operators of the form (1) is the operator of integration J

$$J : f \to \int_0^x f(t)\,dt \tag{2}$$

and its positive powers J^α

$$J^\alpha : f \to \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Recall that two bounded linear operators A and B acting in a Banach space X are called similar if there exists a bounded operator T with bounded inverse such that $TAT^{-1} = B$.

Similarity of a Volterra operator to the integration operator J and its positive integer powers J^n in the spaces $L_p[0,1]$ has been investigated in numerous papers [2] - [8], [11] - [12] starting from works of G. K. Kalish [4] and L. A. Sakhnovich [11].

The first results on similarity in $L_p[0,1]$ of a convolution Volterra operator K to the operator (3) with arbitrary positive (noninteger) α have been obtained by R. Frankfurt and J. Rovnyak [2].

Using another approach M. M. Malamud [7] has improved their (sufficient) results and obtained criteria of similarity between the operators K and J^α in $L_p[0,1]$. He has also obtained (see [8]) sufficient conditions for a nonconvolution Volterra operator K to be similar in $L_p[0,1]$ to the operator (3).

We have obtained [1] sufficient conditions for a convolution Volterra operator K to be similar in Sobolev spaces $W_p^m[0,1]$ to the operator (3). This result reads as follows.

Theorem 1. *Let $k(\cdot) \in W_p^{\alpha+m-2}[0,1] \cap W_1^{\alpha+1}[0,1]$ and $k^{(\alpha-j)}(0) = 0$ for $j \in \{1,\dots,m\}$, either $\alpha > m - \frac{1}{p}$ or $\alpha \in \mathbb{N}$. Then the operator*

$$J^\alpha + K : f \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \int_0^x k(x-t)f(t)\,dt \tag{4}$$

is similar to the operator J^α *in the Sobolev spaces* $W_p^m[0,1]$, $p \in [1,+\infty]$.

In this paper are interested in the following problem:

Given two Volterra operators K_i $i \in \{1,2\}$ of the form (1) satisfying the conditions of Theorem 1 with $\alpha_i > 0$ $i \in \{1,2\}$. Find a criterion for a pair $\{K_1, K_2\}$ to be similar to the pair $\{J^{\alpha_1}, J^{\alpha_2}\}$ in the Sobolev space $W_p^m[0,1]$.

In other words, the problem is to find a criterion of existence of an automorphism S of $W_p^m[0,1]$ such that

$$S^{-1}K_iS = J^{\alpha_i} \qquad i \in \{1,2\}. \tag{5}$$

In the case $m = 0$, that is for the spaces $L_p[0,1]$ this problem has completely been solved by R. Zuidwijk [13] (the case of integer $\alpha_i \in \mathbb{N}$) and by M. M. Malamud and R. Zuidwijk [10] (the case of any $\alpha_i > 0$).

Notations: $\Pi_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ stands for the right half-plane of the complex plane $\mathbb{C}$; $R_T(\lambda) := (T-\lambda)^{-1}$ is the resolvent of an operator T defined on a Banach space X; $\sigma(T)$ and $\rho(T)$ stand for the spectrum and the resolvent set of an operator T respectively; $(f * g)(x) := \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ is a convolution of functions f and g.

2. Fractional powers of operators

We say that a bounded operator T on a Banach space X is of weak type if its spectrum is contained in the closure of the right half-plane, $\sigma(T) \in \bar{\Pi}_+$, and with some constant $M > 0$ the following inequality holds

$$\|R_T(-x)\| = \|(T+x)^{-1}\| \leq \frac{M}{x}, \qquad x > 0. \tag{6}$$

It is known (see [6], Sect. 5.8) that inequality (6) yields a similar inequality in each sector $S_\beta = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0 : |\arg \lambda| < \beta\}$

$$\|R_T(-\lambda)\| = \|(T+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in S_\beta, \tag{7}$$

where $\beta \in (0, \pi/2)$ and $M_1 (\geq M)$ is a constant depending on M.

We put an operator T on X in the class $SA(\beta, M_1)$ if inequality (7) holds true.

If T is an operator of weak positive type, then so is an operator $A = L^{-1}TL$ similar to T. Moreover, if $T \in SA(\beta, M_1)$ then $A = L^{-1}TL \in SA(\beta, M_2)$ with a constant $M_2 \leq \|L\| \cdot \|L^{-1}\| \cdot M_1$.

Let T be an operator of weak positive type on a Banach space X. Following [5] and [6] we define its fractional powers T^ε, $\varepsilon \in (0,1)$ as

$$\{T\}^\varepsilon := \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\varepsilon-1}(\lambda I + T)^{-1}T d\lambda, \qquad \varepsilon \in (0,1), \tag{8}$$

and $\{T\}^0 = I$. For any $\gamma = n - \varepsilon$ where n is the positive integer, $n \in \mathbb{Z}_+$, and $\varepsilon \in (0,1)$, the operator T^γ is defined as

$$\{T\}^\gamma := T^{n-1}\{T\}^{1-\varepsilon}. \tag{9}$$

At first we consider the operator of fractional integration of the form (3).

Lemma 1. *The operator of fractional integration* J^α *(*$\alpha \geq m$*) is of weak positive type on* $W_p^m[0,1]$ *for* $m \in \mathbb{Z}_+$ *and* $p \in [1,+\infty]$. *Moreover* $J^{\alpha\gamma} = (J^\alpha)^\gamma = \{J^\alpha\}^\gamma$ *for* $\gamma > (m - 1/p)\alpha^{-1}$.

We follow [10] for proof. Namely, we prove that the resolvent $(\lambda I + J^\alpha)^{-1}$ is a convolution operator with integral kernel $\psi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}t^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(-t^\alpha/\lambda;\alpha)$, where $E_\rho(z;\mu)$ is Mittag-Leffler function. Then we estimate the norm of $\psi_\lambda * f$ in $W_p^m[0,1]$ and obtain desired estimate (7) for $T := J^\alpha$.

Proposition 1. Let K be a convolution operator of the form (1). Then the operator $J^{\alpha}(I+K)$ is of weak positive type on $W_p^m[0,1]$.

We estimate the resolvent $(\lambda I + J^{\alpha}(I+K))^{-1}$ using the estimate of the resolvent of the operator J^{α}.

3. Fractional Powers of Volterra operators

Here we consider a convolution Volterra operator of the form

$$K : f \to \int_0^x k(x-t)f(t)dt, \quad f \in W_p^m[0,1], \tag{10}$$

with a smooth kernel. Following [9] we introduce fractional powers K^{β}, $\beta > 0$ of K under additional restrictions on its kernel $k(\cdot)$.

Let us recall a definition of Liouville-Sobolev spaces $W_p^{\beta}[0,1]$, $\beta > 0$. If $\beta = m$ is integer, then $f \in W_p^m[0,1]$ if and only if f has continuous derivatives up to order $m-1$, $f^{(m-1)}$ is absolutely continuous and $f^{(m)} \in L_p[0,1]$.

Otherwise, let m be the nonnegative integer such that $m < \beta \leq m+1$ and put $\varepsilon = \beta - m$. Then $f \in W_p^{\beta}[0,1]$ if and only if $J^{\varepsilon} f \in W_p^m[0,1]$.

We may define fractional derivatives by means of fractional powers of the operator of integration. This relies on the fact that the differential operator acts as a left inverse on the operator of integration. Therefore, if $\beta > 0$ and n an integer such that $n-1 < \beta \leq n$, then

$$D^{\beta} f = D^n J^{n-\beta} f.$$

It is known (see for instance [7]) that any function $k \in W_p^{\alpha}[0,1]$, with n the integer such that $n-1 < \alpha \leq n$, admits a representation

$$k(x) = \sum_{j=1}^{n} k^{(\alpha-j)}(0) \frac{x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(t)dt \tag{11}$$

with $g \in L_p[0,1]$. In the case when the derivatives at zero are given by

$$k^{(\alpha-n)}(0) = \cdots = k^{(\alpha-2)}(0) = 0, \quad k^{(\alpha-1)}(0) = 1,$$

then the function k is of the form

$$k(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(t)dt, \tag{12}$$

i. e., $k = [1]^{\alpha} + [1]^{\alpha} * g$ where $[1]^{\alpha} := x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Accordingly, the convolution integral operator (10) with kernel (12) admits a factorisation

$$K = J^{\alpha}(I+G), \tag{13}$$

where G is the convolution integral operator with integral kernel $g \in L_p[0,1]$.

Following [9] we define fractional powers K^{γ} for $K = J^{\alpha}(I+G)$ in $W_p^m[0,1]$ as follows:

$$K^{\gamma} := J^{\alpha\gamma}(I+G)^{\gamma}, \gamma > (m-1/p)\alpha^{-1}, \tag{14}$$

where $J^{\alpha\gamma} f = [1]^{\alpha\gamma} * f$ for $f \in W_p^m[0,1]$ and

$$(I+G)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} G^k.$$

Here we assume that $\alpha \geq m$. As usual $\binom{\gamma}{k}$ denotes a generalized binomial coefficient.

According to previous proposition an operator K of the form (13) is of weak positive type on $W_p^m[0,1]$. Therefore it is appropriate to check whether the two definitions of fractional powers given above coincide for the convolution Volterra operators of the form $J^\alpha(I+K)$.

The following theorem presents a positive answer to this question.

Theorem 2. *Let K be a Volterra convolution operator on $W_p^m[0,1]$ of the form (10). Then the operator $T = J^\alpha(I+K)$ $(\alpha \geq m)$ is of weak positive type on each $W_p^m[0,1]$, $p \in [1,+\infty]$ and satisfies*

$$\{T\}^\gamma = \{J^\alpha(I+K)\}^\gamma = J^{\alpha\gamma}(I+K)^\gamma, \quad \gamma > (m-1/p)\alpha^{-1}.$$

4. Simultaneous Similarity

Theorem 3. *Let K_i be convolution Volterra operator of the form (10) with a kernel $k_i \in W_p^{m+\alpha_i-2}[0,1] \cap W_1^{\alpha_i+1}[0,1]$ $i \in \{1,2\}$ $(n_i - 1 < \alpha_i \leq n_i$ $)$ satisfying the conditions*

$$k^{(\alpha_i - n_i)}(0) = \cdots = k^{(\alpha_i-2)}(0) = 0, \quad k^{(\alpha_i-1)} = 1, \quad i \in \{1,2\}. \tag{15}$$

Then the following two statement are equivalent:

(i) $K_1^{\alpha_2} = K_2^{\alpha_1}$;

(ii) The pair $\{K_1, K_2\}$ is similar to the pair $\{J^{\alpha_1}, J^{\alpha_2}\}$.

Доказательство. The proof is close to that of [10]. It follows from conditions (15) that the kernel k_i admits a representation (12) with $g_i \in W_p^{m-2}[0,1] \cap W_1^1[0,1]$. Hence K_i admits a factorization (13), that is $K_i = J^{\alpha_i}(I+G_i)$ where

$$G_i : f \to \int_0^x g_i(x-t)f(t)dt \quad (i = 1,2).$$

According to functional calculus (14) there exists a convolution Volterra operator $R_i : f \to \int_0^x r_i(x-t)f(t)dt$ with $r_i \in L_1[0,1]$ $(i = 1,2)$ such that $H_i = J^m(I+R_i)$ satisfies $H_i^{\frac{\alpha_i}{m}} = K_i$ $(i \in \{1,2\}$.

Observe that $K_1^{\alpha_2} = K_2^{\alpha_1}$ implies $H_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{m}} = H_2^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{m}}$, and by taking the power $\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}$ at both sides, we get $H_1 = H_2 = H$.

It can be easily proved (see [8])that $r_i \in W_p^{m-2}[0,1] \cap W_1^1[0,1]$ since $g_i \in W_p^{m-2}[0,1] \cap W_1^1[0,1]$. Hence by Theorem 1 with $\alpha = m$ the operator H is similar to the operator J^m, that is there exists a similarity transformation S on $W_p^m[0,1]$, $p \in [1,\infty]$, such that $H = S^{-1}J^mS$. Therefore H is of weak positive type operator on each $W_p^m[0,1]$ because so is J^m. Hence combining Theorem 2, Lemma 1 and definition (8) of $\{\cdot\}^\gamma$, with $\gamma_i = \alpha_i/m$ $i \in \{1,2\}$ we arrive at the equality

$$K_i = H^{\alpha_i/m} = \{H_i\}^{\alpha_i/m} = \frac{\sin(\pi\varepsilon_i)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha_i/m-1}(\lambda I + H)^{-1}Hd\lambda$$

$$= \frac{\sin(\pi\varepsilon_i)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha_i/m-1}(\lambda I + S^{-1}J^mS)^{-1}S^{-1}J^mSd\lambda$$

$$= \frac{\sin(\pi\varepsilon_i)}{\pi}S^{-1}\int_0^\infty \lambda^{\alpha_i/m-1}(\lambda I + J^m)^{-1}J^md\lambda S = S^{-1}\{J^m\}^{\alpha_i/m}S = S^{-1}J^{\alpha_i}S.$$

This proves that the first statement yields the second one.

To prove the converse, note that if $K_i = S^{-1}J^{\alpha_i}S$ $i \in \{1,2\}$ then $H := S^{-1}J^mS$is a convolution Volterra operator of weak positive type on $W_p^m[0,1]$ because so is J^m. Therefore by Theorem 2

$$H^{\alpha_i/m} = \{H\}^{\alpha_i/m} = S^{-1}\{J^m\}^{\alpha_i/m}S = S^{-1}J^{\alpha_i}S = K_i, \quad i \in \{1,2\}.$$

It follows that $K_1^{\alpha_2} = (H^{\alpha_1/m})^{\alpha_2} = (H^{\alpha_2/m})^{\alpha_1} = K_2^{\alpha_1}$. □

Example 1. It follows from Theorem 1 that an operator $J^\alpha + J^{\alpha+\varepsilon}$ is similar to J^α on $W_p^m[0,1]$ if $\varepsilon > \max\{1, m-1-1/p\}$.

By Theorem 3 a pair $\{J^{\alpha_1}(I+J^\varepsilon), J^{\alpha_2}(I+G)\}$ where G is a Volterra convolution operator, is similar to the pair $\{J^{\alpha_1}, J^{\alpha_2}\}$ on $W_p^m[0,1]$ iff $G = (I+J^\varepsilon)^{\alpha_2-\alpha_1} - I$.

In particular, for arbitrary $\alpha_i, \varepsilon_i \in \mathbb{R}_+$ a pair $\{J^{\alpha_1}(I+J^{\varepsilon_1}), J^{\alpha_2}(I+J^{\varepsilon_2})\}$ is not similar on $W_p^m[0,1]$ to a pair $\{J^{\alpha_1}, J^{\alpha_2}\}$ since the equality $(I+J^{\varepsilon_1})^{\alpha_2-\alpha_1} = I + J^{\varepsilon_2}$ is not valid if $|\alpha_2-\alpha_1| + |\varepsilon_1-\varepsilon_2| > 0$.

Note also that the pair $\{J^{\alpha_1}(I+J^\varepsilon), J^{\alpha_2}(I+G)\}$ with G defined above and $\varepsilon > 0$, is similar to the pair $\{J^{\alpha_1}, J^{\alpha_2}\}$ if $\varepsilon > \max\{1, m-1-1/p\}$.

Theorem 3 can be easily extended to the case of N-tuples operators K_i, $i \in \{1,\cdots,N\}$. Namely, the following theorem is valid.

Theorem 4. *Let K_i be a convolution Volterra operators of the form* (10) *with a kernel $k_i \in W_p^{m+\alpha_i-2}[0,1] \cap W_1^{\alpha_i+1}[0,1]$* ($i \in \{1,\cdots,N\}$) *satisfying conditions* (15). *Then the N-tuple $\{K_i\}_1^N$ is similar to the N-tuple $\{J^{\alpha_i}\}_1^N$, that is there exists an automorphism S of $W_p^m[0,1]$, $p \in [1,+\infty]$, such that $K_i = S^{-1}J^{\alpha_i}S$ $(i \in \{1,\cdots,N\})$, iff*

$$K_1^{\alpha_1} = K_i^{\alpha_i}, \quad i \in \{1,\cdots,N\}.$$

References

[1] Dud'eva G. S. *On Similarity of Volterra Operators in Sobolev Spaces.* // MFAT, - 1999. - v. 5, no. 2. - P. 1–11.

[2] Frankfurt R. and Rovnyak J. *Finite convolution operators.* // J. Math. Anal. Appl. - 1975. - v. 49. - P. 347–374.

[3] Frankfurt R. and Rovnyak J. *Recent Results and Unsolved Problems on Finite Convolution Operators.* // Linear Spaces and Approximation - 1978. - P. 133–150.

[4] Kalisch G. K. *On similarity, reducing manifolds and unitary equivalence of certain Volterra operators.* // Ann. of Math. - 1957. - v. 66, no. 3. - P. 481–494.

[5] Kato T. *Perturbation theory linear operators.* // Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966.

[6] Krein S. G. *Linear differential equations in a Banach space.* // Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1971.

[7] Malamud M. M. *Spectral analysis of Volterra operators with kernel, depending on the difference of the arguments.* // Ukrain. Mat. Zh. - 1980. - v. 32, no. 5. - P. 601–609.

[8] Malamud M. M. *Spectral Analysis of Volterra Operators and Related Questions of the Theory of differential equation of fractional order.* // Trans. Moscow Math. Soc. - 1994. - v. 55. - P. 57–122.

[9] Malamud M. M. *On cyclic subspaces of Volterra operators.* // Dokl. Akad. Nauk - 1996. - v. 351, no. 4. - P. 454–458 (Russian); English transl. in Doklady Mathematics - 1996. - v. 54, no. 3. - P. 901–905.

[10] Malamud M. M., Zuidwijk R. *Simultaneous similarity of pairs of convolution Volterra operators to fractional powers of the operator of integration.* // MFAT - 2003. - v. 9, no. 2. - P. 154–162.

[11] Sakhnovich L. A. *Spectral analysis of operators of the form $Kf = \int_0^x k(x-t)f(t)dt$.* // Izv. Akad. Nauk USSR, ser. mat. - 1958. - v. 22, no. 2. - P. 299–308.

[12] Sakhnovich L. A. *On the reduction of nonselfadjoint operators to simplest form.* // Uspekhi Mat. Nauk - 1958. - v. 13, no. 5 (83). - P. 204–206.

[13] Zuidwijk R. A. *Simultaneous similarity of convolution operators to powers of the operator of integration.* // Ukrain. Mat. Zh. - 1995. - v. 47, no. 10. - P. 1432–1437.

Romashchenko G. S., Donetsk State University of Management, Chelyuskintsev str. 163a, Donetsk, 83015, Ukraine

E-mail: gal_romash@mail.ru

INVARIANT AND HYPERINVARIANT SUBSPACES OF THE OPERATOR J^α IN $C^k[0,1]$

Surovtseva V.V.

Introducion. It is well-known [5], [12] that the operator J defined on $L_p[0,1]$ by $J : f(x) \mapsto \int\limits_0^x f(t)dt$ is unicellular for $p \in [1,\infty)$ and its lattice of invariant subspaces is anti-isomorphic to the segment $[0,1]$. The same is true (see [5], [12]) for the simplest Volterra operators

$$J^\alpha : \ f(x) \mapsto \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt, \qquad \text{Re } \alpha > 0,$$

being the complex powers of the operator J.

Namely (see [5], [2]) :

$$LatJ^\alpha = HyplatJ^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]}L_p[0,1] : \ 0 \le a \le 1\}. \tag{1}$$

A description of the set $CycJ^\alpha$ (cyclic vectors) immediately follows from (1)

$$f \in CycJ^\alpha \Leftrightarrow \int\limits_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

The last condition is said to be the ε-condition. The result about unicellularity of the operator J defined on $L_p[0,1]$ (see [4]) was extended to the case of the operator $J_k \ : f \to \int\limits_0^x f(t)dt$ defined on the Sobolev spaces $W_2^k[0,1], W_p^k[0,1]$ and $C^k[0,1]$. It was shown in [15] (see also [13] and [8]) that the operator J_k defined on $X := W_p^k[0,1](C[0,1], C^k[0,1])$ is unicellular too and its lattice $LatJ_k$ consists of a continuous part Lat^cJ_k, where

$$Lat^cJ_k = \{E_a : \ 0 \leqslant a \leqslant 1\}, \qquad E_a = \{f \in X : \ f(x) \equiv 0, x \in [0,a]\},$$

and a discrete part Lat^dJ_k, where

$$Lat^dJ_k = \{E_l^k\}_{l=0}^k, \quad E_l^k := \{f \in X \ : \ f(0) = \dots = f^{(k-l-1)}(0) = 0\} \tag{3}$$

$l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. It is obvious that

$$E_{a_1} \subset E_{a_2} \subset E_{l_1}^k \subset E_{l_2}^k \qquad \text{for any} \qquad a_1 > a_2, \ \ l_1 > l_2.$$

A description of the set of cyclic vectors for the operator J_k defined on $X = W_p^k[0,1]$ immediately follows from the description of the lattice of invariant subspaces $LatJ_k$:

$$f \in CycJ_k \Leftrightarrow f(0) \neq 0. \tag{4}$$

The integral operator J_k^α defined on $W_p^k[0,1]$ has been investigated in [3]. Spectral properties of the operator J_k^α defined on $W_p^k[0,1]$ has been investigated by I.Yu.Domanov and M.M.Malamud in [3]. Namely, a description of the lattices $LatJ_k^\alpha$ and $HyplatJ_k^\alpha$ and the commutant $\{J_k^\alpha\}'$ have been obtained in [3]. In particular, it turned out that J^α is unicellular in $W_p^k[0,1]$ $(k > 1)$ if and only if $\alpha = 1$.

In [14] these results have been extended to the case of the operator J_k^α defined on Sobolev space $W_p^s[0,1]$ with noninteger $s > 0$.

In this paper we generalize some results from [3] to the case of the spaces $C^k[0,1]$ and $C_0^k[0,1]$, where $C_0^k[0,1] := \{f \in C^k[0,1] : f(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0\}$.

Namely, we prove the unicellularity of the operator $J_{k,0}^\alpha := J_k^\alpha$ defined on $C_0^k[0,1]$. Moreover, we describe the lattice of invariant subspaces $LatJ_k^\alpha$ and the set of cyclic subspaces $CycJ_k^\alpha$ of the integral operator J_k^α defined on $C^k[0,1]$. Besides, we investigate the commutant $\{J_{k,1}^\alpha\}'$ of the operator $J_{k,1}^\alpha$ defined on

$$C_0^{k,1}[0,1] := E_1^k[0,1] = \{f \in C^k[0,1] : f(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0\}.$$

Notations. X_j stands for the Banach spaces $j \in \{1,2\}$; $[X_1, X_2]$ is the space of bounded linear operators from X_1 to X_2; $[X] := [X, X]$. $AlgT$ denotes the weakly closed subalgebra of $[X]$ generated by T and the identity I; Lat$T$ and Hyplat$T$ are the lattices of invariant and hyperinvariant subspaces on an operator $T \in [X]$ respectively. supp f is a support of f; $\mathbb{Z}_+ := \{n : \ n \in \mathbb{Z}, \ n \geq 0\}$; $r * f$ stands for the convolution product of functions $r, \ f \in L_1[0,1] \ : \ r * f := \int_0^x r(x-t)f(t)dt$.

1. Invariant subspaces of the operator J^α in $C^k[0,1]$.

In this section we present a description of the lattices $LatJ_{k,0}^\alpha$ and $LatJ_k^\alpha$. Let us introduce

Definition 1. Let X be a Banach space. An operator $T \in [X]$ is called unicellular if its lattice of invariant subspaces $LatT$ is linearly ordered.

Theorem 1. *Let* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *and* $J_{k,0}^\alpha$ *defined on* $C_0^k[0,1]$. *Then*

$$LatJ^\alpha = \{E_a : \ 0 < a \leqslant 1\}, \qquad E_a : = \{f \in C_0^k[0,1] : \ f(x) = 0, \ x \in [0,a]\}.$$

In particular, the operator $J_{k,0}^\alpha$ *is unicellular.*

To present a description of $LatJ_k^\alpha$ we recall a description of $LatQ$ for a nilpotent operator $Q \in [\mathbb{C}^k]$.

Proposition 1. ([1], [6]) If Q is nilpotent on a finite-dimensional vector space V. Then

$$Lat(Q) = \bigcup_M \{[M, Q^{-1}M] : \ M \in Lat(Q \restriction QV)\}, \tag{5}$$

where $[M, Q^{-1}M]$ is an interval in the lattice of all subspaces of V. Each interval satisfies the equation

$$dim\ Q^{-1}M - dim\ M = dim\ \ker Q. \tag{6}$$

For any bounded operator T defined on a Banach space X ($T \in [X]$) and $E \in LatT$ we denote by $\hat{T}_E$ the quotient operator acting on the quotient space X/E according to the natural rule $\hat{T}\hat{f} = \widehat{(Tf)}$, where $\hat{f}$ stands for a coset $\hat{f} = f + E$. Following theorem gives a description of the lattice of the invariant subspaces of the operator J_k^α in $C^k[0,1]$.

Theorem 2. *Let* π *be the quotient map,*

$$\pi : \ C^k[0,1] \mapsto X_k : = C^k[0,1]/C_0^k[0,1] \tag{7}$$

and $\hat{J}_k^\alpha$ *be the quotient operator on* X_k. *Then* $LatJ_k^\alpha = Lat^c J_k^\alpha \cup Lat^d J_k^\alpha$, *where*

$$(a)\ Lat^c J_k^\alpha = \{E_a : \ 0 \leqslant a \leqslant 1\}, \tag{8}$$

is a "continuous part"of $LatJ_k^\alpha$;

$$(b)\ Lat^d J_k^\alpha = \pi^{-1}(Lat\hat{J}_k^\alpha) = \bigcup_M \pi^{-1}\{[M, (\hat{J}_k^\alpha)^{-1}M] : \ M \in Lat(\hat{J}_k^\alpha \restriction \hat{J}_k^\alpha M)\} \tag{9}$$

is a "discrete part"of $LatJ^\alpha$. *Here* $[M, (\hat{J}_k^\alpha)^{-1}M]$ *is a closed interval in the lattice of all subspaces of* X_k. *Each interval satisfies the equation*

$$dim(\hat{J}_k^\alpha)^{-1}M - dimM = d, \tag{10}$$

where $d = min\{-[-\alpha], k\}$.

Corollary 1. *The operator J_k is unicellular and its lattice has a description $Lat J_k = Lat^d J_k \cup Lat^c J_k$, where*

$$Lat^c J_k = \{E_a : \ 0 < a \leqslant 1\}, \qquad E_a : = \{f \in C_0^k[0,1] : \ f(x) = 0, \qquad x \in [0,a]\},$$

$$Lat^d J_k = \{E_l^k\}_{l=0}^{k+1}, \qquad E_l^k : = \{f \in X : f(0) = \dots = f^{(k-l)}(0) = 0\},$$

$$l \in \{0, \dots, k\}, \qquad E_{k+1}^k : = C^k[0,1].$$

2. Cyclic Subspaces of the operator J_k^α on $C^k[0,1]$.

Definition 2. A subspace E of a Banach space X is called a cyclic subspace for an operator $T \in [X]$ if $span\{T^n E : n \geq 0\} = X$. A vector $f(\in X)$ is called cyclic if $span\{T^n f : n \geq 0\} = X$. The set of all cyclic subspaces of an operator T is denoted by $Cyc(T)$.

Definition 3. We set

$$\mu_T := \inf_E \{dim E : \ E \text{ is a cyclic subspace of the operator } T \in [X]\}.$$

μ_T is called the *spectral multiplicity* of an operator T in X.

Note that μ_T can be ∞.

Definition 4. The operator T is called cyclic if $\mu_T = 1$.

Theorem 3. *Let $\operatorname{Re}\alpha > 0$ and either $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, or $\operatorname{Re}\alpha > k$. Then the operator $J_{k,1}^\alpha$ defined on $C_0^{k,1}[0,1]$ is cyclic. Moreover the following equivalence holds:*

$$f \in Cyc J_{k,1}^\alpha \Leftrightarrow f^{(k)}(0) \neq 0.$$

Theorem 4. *The operator J defined on $C^k[0,1]$ is cyclic. Moreover the following equivalence holds :*

$$f \in Cyc J \Leftrightarrow f(0) \neq 0.$$

Proposition 2. Let either Re $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \diagdown \{0\}$ or Re $\alpha > k$ and the operator J_k^α defined on $C^k[0,1]$. Then:

1) The spectral multiplicity $\mu_{J_k^\alpha}$ of J_k^α is

$$\mu := \mu_{J_k^\alpha} = \begin{cases} min\{\operatorname{Re}\alpha, k\}, & \alpha \in \mathbb{Z}_+ \diagdown \{0\} \\ k, & \operatorname{Re}\alpha \notin \mathbb{Z}_+ \diagdown \{0\} \end{cases}; \tag{11}$$

2) The system $\{f_j\}_1^N$ of vectors $f_j \in C^k[0,1]$ generates a cyclic subspace for J_k^α if and only if:

i) $N \geq \mu$;

ii) $rank W_\mu\{f_1, \dots, f_N\}(0) = \mu$, where

$$W_\mu\{f_1, \dots, f_N\}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_N(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_N'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(\mu-1)}(x) & f_2^{(\mu-1)}(x) & \dots & f_N^{(\mu-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Corollary 2. *Let μ be defined by (11). Then a system $\{f_j\}_1^\mu$ generates a cyclic subspace of J_k^α on $C^k[0,1]$ if and only if $det W_\mu\{f_1, \dots, f_\mu\}(0) \neq 0$.*

3. Commutant of the operator $J_{k,1}^{\alpha}$.

The results of this Section have been obtained jointly with M.M.Malamud.

Definition 5. Denote by $\{R\}'$ the commutant of an operator $R \in [X]$.

First we describe the commutant $\{J^{\alpha}\}'$ of the operator J^{α} in $C[0,1]$.

Proposition 3. Let $\operatorname{Re}\alpha > 0$ and $X = C[0,1]$. Then $R \in \{J^{\alpha}\}'$ if and only if R is of the form

$$(Rf)(x) = \int_0^x f(t)dr(x-t), \tag{12}$$

where $r(\cdot)$ is a continuous function of bounded variation and it is normalized at zero by $r(0) = 0$.

Proposition 4. The operator $J_{k,1}^{\alpha}$ defined on $C_0^{k,1}[0,1]$ is isometrically equivalent to the operator $J_0^{\alpha} := J^{\alpha}$ defined on $C[0,1]$.

Combining Proposition 3 and Proposition 4 we arrive at

Theorem 5. *Let* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *and* $X = C_0^{k,1}[0,1]$. *Then* $R \in \{J_{k,1}^{\alpha}\}'$ *if and only if* R *is of the form*

$$(Rf)(x) = \int_0^x f(t)dr(x-t), \tag{13}$$

where $r(\cdot)$ *is a continuous function of bounded variation and it is normalized at zero by* $r(0) = 0$.

The author expresses her gratitude to the scientific adviser M.M.Malamud for posing the problem and help and to I.Yu.Domanov for useful remarks.

References

[1] Brickman L., Fillmore P.A. *The invariant subspace lattice of a linear transformation.* Canad. J. Math.-1967.-19.-P.810-822

[2] Brodskii M.S. *Triangular and Jordan Representations on Linear operators.* Transl. Math. Monographs 32,Amer. Math. Soc.-1971.

[3] Domanov I.Yu., Malamud M.M. *Invariant and hyperinvariant subspaces of an operator* J^{α} *and related operator algebras in sobolev spaces.*Linear Algebra and Appl.-2002.-381.-N 1-3.-P.209-230

[4] Donoghue W.F., Jr. *The lattice of invariant subspaces of completely continuius quasinilpotent transformation* //Pacific. J. Math.-1957.-7.-N 2 -P.1031-1035

[5] Gohberg I.C., Krein M.G. *Theory and Applications of Volterra operators in Hilbert space* . Transl. Math. Monographs 24, Amer. Math. Soc.-1970.

[6] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Invariant Subspaces of Matrices with Applications.* A Wiley-Interscience Publication.- 1986

[7] Halmos P.R. *Eigenvectors and Adjoints.* Linear Algebra and its Applications.-1971.-4.-P.11-15

[8] Karaev M.T., *Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators.* Methods of Functional Analysis and Topology.-Vol.11.-N1.-2005.-P.48-59

[9] Malamud M.M. *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators.* Operator Theory : Advances and Applications., Integral and Differential Operators.-1998.-102.-P.143-167

[10] Malamud M.M. *Spectral Analysis of Volterra Operators and Inverse Problems for Systems of Ordinary Differential Equations.*-1997.-Preprint

[11] Nikol'skii M.S. *On System of Linear Integral Equation of Volterra Type in Convolutions.* Proc / of the Steklov Inst. of Math.-1988.-220.-P.210-216.

[12] Nikolskii N.K. *Treatise on the Shift Operator.* Springer Verlag,Berlin-1986.

[13] Ostapenko P.V., Tarasov V.G.*About unicellularity of the integration operator in some functional spaces.* The theori of functions, functional analisis and their applications.- 1976.-27.-P.121-128. (in russian)

[14] Romashcenko G.S., *Spectral analysis of positive powers of the integration operator in Sobolev spaces.* Methods of Functional Analysis and Topology.-Vol.10-2004.-N1-P.63-74

[15] Tsekanovskii E.R., *About descriptionof invariant subspaces and unicellularity of the integration operator in the space* $W_2^{(p)}$. Uspehi Mat. Nauk. -1965.-XX, 6(126).-P.169-172. (in russian)

[16] Sarason D. *Invariant subspaces and unstarted operator algebras* . PasificJ.Math.-1966.-17.-P.511-517

V. Surovtseva, Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaya str. 24, 83055 Donetsk, Ukraine *E-mail:* karabashi@yahoo.com

GEOMETRIC ASPECTS OF COMPACTNESS IN OPERATOR ALGEBRAS

I. G. Todorov

The theory of C*-algebras has been linked from its beginning to considerations of geometric nature. Kadison's well known description of the surjective isometries between C*-algebras depended on the identification of the extreme points of the unit ball of the algebra. In his celebrated paper [5] he showed that the extreme points of the unit ball are the partial isometries which satisfy a certain degenerateness condition. Recently, Akemann and Weaver [1] gave geometric characterisations of various classes of elements of a (unital) C*-algebra such as arbitrary partial isometries, unitaries and invertible elements.

The present note is a survey of some known results related to geometric characterisations of compact operators in C*-algebras. The main problem that will be addressed is the following.

Problem *How can one characterise in geometric terms the elements of a given C*-algebra whose images under some faithful *-representation of the algebra are compact operators?*

The main geometric tool for tackling this problem was introduced by Anoussis and Katsoulis [2].

Definition 1. [2] Let X be a Banach space, $X_{(r)}$ be the closed ball of X of radius r, and $\mathcal{S} \subseteq X_{(1)}$. Let
$$\mathrm{cp}(\mathcal{S}) = \{x \in X : \|a \pm x\| \leq 1, \ \forall\, a \in \mathcal{S}\},$$
$\mathrm{cp}^1(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}(\mathcal{S})$ and $\mathrm{cp}^{n+1}(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}(\mathrm{cp}^n(\mathcal{S}))$, $n \geq 1$. Call $\mathrm{cp}^n(\mathcal{S})$ the set of the nth **contractive perturbations** of $\mathcal{S}$, and write $\mathrm{cp}^n(a) = \mathrm{cp}^n(\{a\})$.

The following properties of the set of contractive perturbations are either evident or easy to verify:

- $\mathrm{cp}(\mathcal{S})$ is a closed convex subset of $X_{(1)}$
- $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{cp}^2(\mathcal{S})$
- If $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \subseteq X_{(1)}$ then $\mathrm{cp}(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathrm{cp}(\mathcal{S}_1)$
- a is an extreme point of $X_{(1)}$ if and only if $\mathrm{cp}(a) = \{0\}$, if and only if $\mathrm{cp}^2(a) = X_{(1)}$.

From the second and the third of the above properties it follows that $\mathrm{cp}^{2n+1}(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}(\mathcal{S})$ and $\mathrm{cp}^{2n}(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}^2(\mathcal{S})$, for all $n \geq 1$. Thus, of interest are only the sets $\mathrm{cp}(\mathcal{S})$ and $\mathrm{cp}^2(\mathcal{S})$. Note that, by the last property, not every convex and closed subset $\mathcal{S}$ of $X_{(1)}$ has the property $\mathcal{S} = \mathrm{cp}^2(\mathcal{S})$.

We will first restrict our attention to the case $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, the space of all bounded linear operators acting on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$. The following proposition was established in [2].

Proposition 1. Let $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{(1)}$. Then $T\mathcal{B}(\mathcal{H})_{(\frac{1}{2})}T \subseteq \mathrm{cp}^2(T)$.

From Proposition 1 it follows that the properties of $\mathrm{cp}^2(T)$ are closely related to those of the operator $X \to TXT$.

Proposition 2. Let $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $T\mathcal{B}(\mathcal{H})T$ is separable then T is compact.

Доказательство. We will only consider the case $\mathcal{H}$ is separable. Let $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal basis of $\mathcal{H}$ and P_n be the orthogonal projection onto the span of $e_1, \dots, e_n$. We may assume that T is selfadjoint since the separability of $T\mathcal{B}(\mathcal{H})T$ implies that of $(TT^*)\mathcal{B}(\mathcal{H})(TT^*)$. If T is not compact then we can choose $\epsilon > 0$ and vectors x_k of norm at least $1/2$, such that $x_k = (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})x_k$, for some increasing sequence $\{n_k\}$ of positive integers, and $\|Tx_k\| \geq \epsilon$. For each subset J of $\mathbb{N}$, let $S_J = \sum_{k\in J} x_k \otimes x_k^*$, where the sum converges in the strong operator topology (we have denoted by $x \otimes y^*$ the rank one operator $z \to (z, y)x$). We have that $TS_JT =$

$\sum_{k\in J}(Tx_k)\otimes(Tx_k)^*$. If $J, J' \subseteq \mathbb{N}$ and $J \neq J'$ then, letting k be such that either $k \in J \setminus J'$ or $k \in J' \setminus J$, we conclude that $\|TS_JT - TS_{J'}T\| \geq \|(Tx_k)\otimes(Tx_k)^*\| = \|Tx_k\|^2 \geq \epsilon^2$. Since the cardinality of the subsets of $\mathbb{N}$ is uncountable, this is a contradiction with the separability of $T\mathcal{B}(\mathcal{H})T$ and the proof is complete. $\diamondsuit$

Note that the separability if $T\mathcal{B}(\mathcal{H})T$ is equivalent to that of $T\mathcal{B}(\mathcal{H})_{(r)}T$. Propositions 1 and 2 hence establish the implication (iii)⇒ (i) in the following theorem, which is a special case of the results of Anoussis and Katsoulis [2].

Theorem 1. *Let $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{(1)}$. The following are equivalent:*
(i) *T is compact;*
(ii) $\mathrm{cp}^2(T)$ *is compact;*
(iii) $\mathrm{cp}^2(T)$ *is separable.*

The implication (ii)⇒(iii) is trivial, while for the implication (i)⇒(ii) we would like to give the following intuitive argument. Suppose that (i) holds and that moreover T has finite rank. Write T as a block 2×2 matrix $T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, where T_0 is an operator in a finite dimensional space. Then all operators of the form $T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, where $\|S\| \leq 1$, are obviously in $\mathrm{cp}(T)$. From this it follows that every operator $T'' \in \mathrm{cp}^2(T)$ must have the form $T'' = \begin{pmatrix} T_0'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, for some T_0''. Hence $\mathrm{cp}^2(T)$ is contained in the intersection of the unit ball of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and a finite dimensional space, and is hence compact.

We now want to consider algebras generalising $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. One possibility is to replace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ by an arbitrary C*-algebra. Recall that a **C*-algebra** is a Banach algebra with an involution in which the C*-identity $\|xx^*\| = \|x\|^2$ holds. The space $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is clearly a C*-algebra, when endowed with the involution taking an operator to its adjoint and the usual operator norm. A representation of A on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is a morphism $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$; π is called faithful if it is injective. By Gelfand-Naimark theory, every C*-algebra possesses a faithful representation, so it can be regarded as a closed *-subalgebra of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. If A is a C*-algebra and $a \in A$, there are two plausible options for when a is to be called "compact":
(a) the operator $x \to axa$ is compact as an operator on the Banach space A;
(b) there exists a faithful representation π of A such that $\pi(a)$ is a compact operator.
It was shown by Ylinen [8] that these two statements are equivalent. Anoussis and Kastoulis found the following geometric condition, equivalent to the conditions above.

Theorem 2. [2] *Let A be a C*-algebra and $a \in A_{(1)}$. The following conditions are equivalent:*
(i) there exists a faithful representation π of A such that $\pi(a)$ is a compact operator;
(ii) $\mathrm{cp}^2(a)$ *is a compact set.*

We would like to note that the separability of $\mathrm{cp}^2(a)$ is no longer equivalent to the conditions above: indeed, in every separable C*-algebra $\mathrm{cp}^2(a)$ is automatically separable, but if a C*-algebra is unital then its identity is compact if and only if the algebra is finite dimensional.

It should be pointed out that in [2] it is moreover shown that the existence of a faithful representation π for which $\pi(a)$ has finite rank is equivalent to the linear space generated by $\mathrm{cp}^2(a)$ being finite dimensional.

We would now like to turn our attention to another generalisation of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, namely the algebra of all adjointable operators on a Hilbert module. Let A be a C*-algebra. Recall that a **Hilbert module** over A is a complex linear space X which is also a right A-module endowed with an A-valued sesquilinear form $(\cdot,\cdot)$ satisfying
(i) $(x, y\cdot a) = (x, y)a$;
(ii) $(x, y)^* = (y, x)$;
(iii) $(x, x) \geq 0$, and $(x, x) = 0$ if and only if $x = 0$,

which is moreover complete with respect to the norm $\|x\| = \|(x,x)\|^{1/2}$. Let X be a Hilbert module over a C*-algebra A. If $A = \mathbb{C}$ then we clearly obtain the notion of a Hilbert space (with the antilinearity condition on the inner product holding with respect to the first variable). An operator $T : X \to X$ is called adjointable if there exists a mapping $T^* : X \to X$ such that $(Tx, y) = (x, T^*y)$, for all $x, y \in X$. Let $\mathcal{B}(X)$ be the space of all adjointable operators on X. Of course, in the case $A = \mathbb{C}$, all bounded linear operators are automatically adjointable, but this is no longer true for more general algebras. In all these cases $\mathcal{B}(X)$ is an appropriate analogue of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. With the operator norm and the natural involution, it becomes a C*-algebra. An analogue of a compact operator can also be defined. We first define rank one operators on X: if $x, y \in X$, let, in analogy with the Hilbert space situation, $\Theta_{x,y} : X \to X$ be given by $\Theta_{x,y}(z) = x \cdot (y,z)$, $z \in X$; the operator $\Theta_{x,y}$ is adjointable with $\Theta^*_{x,y} = \Theta_{y,x}$. The closed hull $\mathcal{K}(X)$ of the span of all such operators is a C*-subalgebra of $\mathcal{B}(X)$; its elements are called compact operators on X.

The simplest example of a Hilbert module over a C*-algebra A is A itself, with the inner product $(a,b) = a^*b$. In this case $\mathcal{B}(X) = M(A)$ and $\mathcal{K}(X) = A$, $M(A)$ being the multiplier algebra of A. Thus, if A is unital then all elements of A are compact operators when viewed as adjointable operators acting on A, but $\mathrm{cp}^2(1) = A_{(1)}$ is not compact unless A is finite dimensional. But if A is separable then $\mathrm{cp}^2(a)$ will be automatically separable for each $a \in A$. It turns out that separability is the appropriate condition to replace compactness with. The following version of the previous results was found in [4].

Theorem 3. *Let X be a separable Hilbert module over a separable unital C*-algebra and $T \in \mathcal{B}(X)_{(1)}$. The following are equivalent:*
(i) $T \in \mathcal{K}(X)$;
(ii) $\mathrm{cp}^2(T)$ is separable.

As a direct consequence of this result we obtain that if X and Y are separable Hilbert modules over a separable unital C*-algebra and $\varphi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ is a surjective isometry then $\varphi(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(Y)$.

Theorem 3 is proved in two steps. First the theorem is established in the case $X = l_2(A)$ is the so called **standard Hilbert module** over A, by a suitable generalisation of the proof of Proposition 2. Recall that

$$l_2(A) = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i < \infty\},$$

the inner product being given by $((a_i),(b_i)) = \sum a_i^* b_i$. A theorem of Kasparov's [6] characterises the countably generated Hilbert modules over a C*-algebra A as the direct summands of $l_2(A)$. A lemma establishing the "good" behaviour of cp^2 with respects to direct sums allows to use Kasparov's result to complete the proof of the theorem.

In conclusion, it should be noted that geometric characterisations of compact operators in non-selfadjoint operator algebras have also been studied. Anoussis and Katsoulis [3] have used the contractive perturbations to study the compact operators in nest algebras, while Katsoulis [7] has given analogous characterisations of the elements of an operator algebra whose image under an isometric representation of the algebra is compact, for a large class of non-selfadjoint operator algebras including classes of limit algebras and function algebras.

References

[1] C. Akemann and N. Weaver, *Geometric characterizations of some classes of operators in C*-algebras and von Neumann algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 10, 3033–3037

[2] M. Anoussis and E. G. Katsoulis, *Compact operators and the geometric structure of C*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 7, 2115 - 2122

[3] M. Anoussis and E. G. Katsoulis, *Compact operators and the geometric structure of nest algebras*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), no.1, 319-335

[4] M. Anoussis and I. G. Todorov, *Compact operators on Hilbert modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 257-261

[5] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. Math. (2) 54, (1951), 325–338

[6] G. G. Kasparov, *Hilbert modules, theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Th. 4 (1980), 133-150

[7] E. G. Katsoulis, *Compact operators and the geometric structure of nest algebras*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), no.1, 319-335

[8] K. Ylinen, *A note on the compact elements of C*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 35 (1972), 305-306

Section 2

EVOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Differential-Operator and Evolution Equations

Boundary Value Problems

ПОЛУГРУППЫ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ, КОРРЕКТНЫМИ ПО ПЕТРОВСКОМУ

У. А. Ануфриева [1]
Уральский государственный университет
Екатеринбург, Россия

Keywords: Дифференциальная система, некорректная задача Коши, полугруппа операторов, преобразование Фурье, обобщенные функции

Для систем дифференциальных уравнений, корректных по Петровскому, построены R–полугруппы в пространствах $L_q(\mathbb{R}^n)$ с весом.

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t), \quad t \in [0;T], \tag{1}$$

$$u(x;0) = f(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матричный оператор: $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{A_{j,k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}_{j,k=1}^{m}$, дифференциальные операторы $A_{j,k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ имеют порядок не выше p. При любых $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0;T]$ решение $u(x,t)$ есть m-мерный вектор: $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)) \in \mathbb{R}^m$.

В настоящей работе исследуется возможность построения полугрупповых семейств для систем (1), корректных по Петровскому. В основе исследования лежит метод обобщенного преобразования Фурье, которое переводит задачу Коши (1), (2), рассматриваемую в некотором пространстве обобщенных функций Φ', в задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{u}(s;t)}{\partial t} = A(s)\widetilde{u}(s;t), \quad t \in [0;T], \tag{3}$$

$$\widetilde{u}(s;0) = \widetilde{f}(s), \tag{4}$$

в пространстве $\widetilde{(\Phi')}$ — пространстве, составленном из обобщенных преобразований Фурье всех распределений из Φ'. Здесь $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$, а матричная функция $A(\cdot)$ системы (3) при каждом $s \in \mathbb{C}^n$ определяет оператор умножения на матрицу, элементами которой служат многочлены степени не выше p.

Решением задачи (3), (4) служит обобщенная функция $\widetilde{u}(s;t) = e^{tA(s)}\widetilde{f}(s)$, которая определена в тех пространствах $\widetilde{(\Phi')}$, где экспонента $e^{tA(\cdot)}$ определяет ограниченный оператор умножения. Тогда обобщенное решение задачи (1), (2) существует в соответствующих пространствах Φ' и имеет вид

$$u(x;t) = F^{-1}(\widetilde{u}(s;t)) = F^{-1}(e^{tA(s)}\widetilde{f}(s)) = (G_t * f)(x),$$

где $G_t(x) = F^{-1}\left(e^{tA(s)}\right)$ — обобщенная матрица-функция Грина. Соответствующее пространство Φ' называется классом обобщенной корректности задачи (1), (2). В [1] показано, что для систем, корректных по Петровскому, роль пространств Φ' играют пространства типа W', S'.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №03-01-00310 и грантом Уральского государственного университета.

В данной работе мы подбираем банаховы функциональные пространства X — насколько возможно широкие, лежащие в классе обобщенной корректности задачи (1), (2). В выбранных пространствах X мы строим (регуляризованные) R–полугруппы операторов. Основная идея построения полугруппы состоит в том, чтобы ввести "корректирующий" множитель $\widetilde{K}(\cdot)$ в обратное преобразование Фурье произведения $e^{tA(\cdot)}\widetilde{f}(\cdot)$ так, чтобы получаемая свертка

$$(G_t * K * f)(x) = F^{-1}\left(e^{tA(s)}\widetilde{K}(s)\widetilde{f}(s)\right)$$

была определена для любого $f \in X$ и являлась функцией — элементом банахова пространства X. Мы показываем, что построенные таким образом операторы свертки с ядром $(G_t * K)(\cdot)$ образуют R–полугруппу в X.

Идея построения R–полугрупп путем коррекции обратного преобразования Фурье, принадлежащая И.В. Мельниковой, реализована в [4] для случая пространств $X = L_2(\mathbb{R}^n)$, где доказательство существенным образом использует специфику преобразования Фурье в $X = L_2(\mathbb{R}^n)$ — теорему Планшереля. В настоящей работе мы рассматриваем в качестве X пространства $L_q^{\omega}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le q < \infty)$ функций, интегрируемых со степенью q с весом $\omega(x) = e^{-\gamma|x|^{p_1}}$, где p_1 и γ зависят от q и определяются оператором системы $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

2. Вспомогательные сведения

В [1] показано, что матричная экспонента $e^{tA(\cdot)}$ удовлетворяет оценке

$$\left\|e^{tA(s)}\right\| \le C_1 e^{b_1 t\cdot|s|^{p_0}}, \qquad t \ge 0, \quad s \in \mathbb{C}^n, \tag{5}$$

где $p_0 \le p$ — приведенный порядок системы (1).

Рассмотрим функцию

$$\Lambda(s) = \max_{1\le j\le m} \Re\lambda_j(s), \qquad s \in \mathbb{C}^n,$$

где $\lambda_j(s)$ — собственные значения матрицы $A(s)$.

Определение 1. Система (1) называется *корректной по Петровскому*, если функция $\Lambda(\cdot)$ ограничена сверху при действительных значениях $s = \sigma$, т.е. если найдется такая постоянная $C > 0$, что $\Lambda(\sigma) \le C$ при любом $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

В [2] доказано, что для системы, корректной по Петровскому, найдется область

$$H_\mu = \{s = \sigma + i\tau : \ |\tau| \le \nu(1 + |\sigma|)^\mu\}, \qquad 1 - p_0 \le \mu \le 1, \quad \nu = \nu(b_1, h),$$

в которой для матричной функции $e^{tA(\cdot)}$ выполнена оценка

$$\left\|e^{tA(s)}\right\| \le C(1 + |\sigma|)^h, \qquad t \ge 0, \quad s \in H_\mu. \tag{6}$$

В настоящей работе мы рассматриваем случай $p_0 > 1$. (Это связано с тем, что при $p_0 \le 1$ система (1) является гиперболической и для нее можно существенно расширить классы корректности, а, следовательно, иначе осуществить выбор банаховых пространств X.) При $p_0 > 1$ число μ, определяющее область H_μ, может оказаться как положительным, так и отрицательным.

Для простоты изложения проведем все построения при $n = 1$, то есть для $s \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. В случае $0 < \mu \le 1$ на основе свойств аналитических функций, доказанных в [2], можно показать, что матричная экспонента $e^{tA(\cdot)}$ удовлетворяет при $t \in [0; T]$ условию

$$\left\|e^{tA(s)}\right\| \le C(1 + |\sigma|)^h e^{\Omega(\rho\tau)}, \qquad s = \sigma + i\tau, \tag{7}$$

где $\Omega(\tau) = \frac{|\tau|^{p_0/\mu}}{p_0/\mu}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\rho = \left(\frac{bp_0T}{\mu}\right)^{\mu/p_0}$ при любом $b > b_1$.

Возьмем произвольное $\beta > 0$ и рассмотрим пространства $W^{\Omega,\beta}$, $W^{\Omega,\beta+\rho}$.

Пространство $W^{\Omega,\,\beta}$ — это счетно–нормированное пространство всех целых функций $\varphi(\cdot)$, которые при любом $\rho>0$ удовлетворяют неравенствам

$$|z^k\varphi(z)|\le C_{k,\,\rho}e^{\Omega((\beta+\rho)y)},\qquad z=x+iy\in\mathbb{C},\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Теорема 1. [1] *Если целая функция $f(\cdot)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(z)|\le C(1+|x|^h)e^{\Omega(\rho y)},\quad z=x+iy\in\mathbb{C},$$

то она определяет ограниченный оператор умножения, действующий из $W^{\Omega,\,\beta}$ в $W^{\Omega,\,\beta+\rho}$ при любом $\beta>0$.

Функция $M(x)=\frac{|x|^{p_1}}{p_1}$, $x\in\mathbb{R}$, является двойственной (по Юнгу) к функции $\Omega(\tau)=\frac{|\tau|^{p_0/\mu}}{p_0/\mu}$, $\tau\in\mathbb{R}$, при $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_0/\mu}=1$. Для двойственных по Юнгу функций имеет место неравенство Юнга:

$$x\tau\le M(x)+\Omega(\tau),\qquad x,\tau\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Возьмем произвольное $\alpha>0$ и рассмотрим пространство $W_{M,\,\alpha}$.

Введем пространство $W_{M,\,\alpha}$ — это счетно–нормированное пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций $\varphi(\cdot)$, которые при любом $\delta>0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\varphi^{(m)}(x)\right|\le C_{m,\,\delta}\,e^{-M((\alpha-\delta)x)},\qquad x\in\mathbb{R},\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

В пространствах $W_{M,\,\alpha}$, $W^{\Omega,\,\beta}$ справедлива следующая теорема двойственности.

Теорема 2. [1] *Если $M(\cdot)$ и $\Omega(\cdot)$ — функции, двойственные по Юнгу, то*

$$\widetilde{W_{M,\,\alpha}}=W^{\Omega,\,1/\alpha},\qquad \widetilde{W^{\Omega,\,\beta}}=W_{M,\,1/\beta}.$$

Согласно теореме 1 из условия (7) следует, что матричная функция $e^{tA(\cdot)}$ определяет ограниченный оператор умножения (мультипликатор), действующий из $W^{\Omega,\,\beta}$ в $W^{\Omega,\,\beta+\rho}$, а следовательно, и из $\left(W^{\Omega,\,\beta+\rho}\right)'$ в $\left(W^{\Omega,\,\beta}\right)'$. По теореме 2 двойственным к пространству $W^{\Omega,\,\beta}$ является пространство $W_{M,\,1/\beta}$. Отсюда следует важный результат, который лежит в основе дальнейшего построения полугрупповых семейств.

Теорема 3. [1] *Пусть для системы (1), корректной по Петровскому, оценка (6) справедлива при $0<\mu\le1$ и пусть выполняется (7) при некотором $\rho>0$. Тогда при любом $\beta>0$ обобщенное обратное преобразование Фурье $G_t(\cdot)$ матричной экспоненты $e^{tA(\cdot)}$ определят непрерывный оператор свертки (свертыватель), действующий из пространства $\left(W_{M,\,\frac{1}{\beta+\rho}}\right)'$ в пространство $\left(W_{M,\,\frac{1}{\beta}}\right)'$.*

2. Рассмотрим теперь случай $1-p_0\le\mu\le0$. Как показано в [2], если аналитическая функция удовлетворяет в области H_μ при $\mu\le0$ неравенству (6), то для ее производных при действительных значениях $s=\sigma$ выполняются оценки вида

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^m e^{tA(\sigma)}\right\|\le C_n\left(1+|\sigma|^{h-\mu m}\right),\qquad t\ge0,\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad \sigma\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Это неравенство показывает, что операторная экспонента $e^{tA(\cdot)}$ порождает ограниченный оператор умножения в пространстве S, а следовательно и в пространстве S'.

Обозначим S множество бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций $\varphi(\cdot)$, которые, также как и их производные, стремятся к нулю при $|x|\to\infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$. Пространство S с заданной на нем системой норм

$$\|\varphi\|_p=\sup_{x,\,m\le p,\,k\le p}\left|x^k\varphi^{(m)}(x)\right|,\qquad p\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

является счетно–нормированным. Двойственным к пространству S снова является пространство S: $\widetilde{S}=S$.

Отсюда следует что функция $G_t(\cdot)$, обобщенное обратное преобразование Фурье матричной экспоненты $e^{tA(\cdot)}$, определяет непрерывный оператор свертки (свертыватель), действующий в пространстве S'.

В дальнейшем кроме поведения оператора решения системы (1) нам потребуется понятие R–полугруппы операторов в банаховом пространстве.

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, обозначим $\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X, с топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Пусть $R \in \mathcal{L}(X)$ — инъективный оператор с плотной в X областью значений $\mathrm{Ran}\ R$.

Определение 2. [6, 3] Семейство линейных ограниченных операторов $\{S(t),\ t \in [0;T]\}$, действующих в пространстве X и удовлетворяющих условиям

(R1) $S(t+\tau)R = S(t)S(\tau), \quad t, \tau, t+\tau \in [0;T]$,
$S(0) = R$;

(R2) операторная функция $S(\cdot)$ сильно непрерывна по t на отрезке $[0;T]$;

называется *локальной R–полугруппой.*

Заметим, что в случае $R = I$ характеристическое свойство R–полугруппы (R1) совпадает с полугрупповым свойством $U(t+s) = U(t)U(s)$ и, следовательно, полугрупповое семейство может быть определено для всех $t \geq 0$. Такая R–полугруппа является полугруппой класса C_0.

3. Построение R–полугрупп

Поскольку классы обобщенной корректности задачи (1), (2) зависят от величины параметра μ, естественно ожидать что выбор банаховых пространств также будет отличаться для $\mu > 0$ и $\mu \leq 0$. Однако схема построения полугруппы общая для обоих случаев, поэтому для $\mu > 0$ мы приводим (схематическое) доказательство, а для $\mu \leq 0$ — лишь формулируем результат.

1). Случай $\mu > 0$. Согласно теореме 3 в этом случае обобщенное решение задачи Коши (1), (2) существует при любом $f \in \left(W_{M, \frac{1}{\beta+\rho}}\right)'$ и является элементом пространства $\left(W_{M, \frac{1}{\beta}}\right)'$, где $M(x) = \frac{|x|^{p_1}}{p_1}$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_0/\mu} = 1$.

Рассмотрим пространство $X_{q,\omega} = L_q^{\omega}(\mathbb{R})$ функций, абсолютно интегрируемых со степенью q $(1 \leq q < \infty)$ с весом $\omega(x) = e^{-\gamma |x|^{p_1}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, то есть пространство функций $u(\cdot)$, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^q e^{-\gamma |x|^{p_1}}\, dx < \infty.$$

В силу определения пространств, имеют место вложения:

$$X_{1,\omega} \subset \left(W_{M,1/\beta}\right)' \qquad \text{при } \gamma \leq \frac{1}{p_1 \beta^{p_1}},$$

$$X_{q,\omega} \subset \left(W_{M,1/\beta}\right)' \qquad \text{при } \gamma = \frac{q}{p_1 (\beta_1)^{p_1}}, \quad \beta_1 > \beta, \quad q \geq 1.$$

Теорема 4. *Пусть для системы (1) выполнены условия (5), (6). Тогда оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порождает в пространстве $X_{q,\omega}$ локальную R–полугруппу $\{S(t),\ t \in [0;T_1)\}$ с оператором R, определяемым равенством*

$$Rf(x) = \int K(x-\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

с интегрируемой функцией $K(\cdot)$, удовлетворяющей при $|s| \to \infty$ условию $\widetilde{K}(s) = O\left(\frac{1}{(1+|s|)^{h_0}}\right)$, $h_0 > h+2$, $s \in \mathbb{C}$. Длина полуинтервала T_1 определяется параметрами задачи p_0, μ, b_1 и параметрами пространства q, γ.

Изложим схему доказательства. Для построения R–полугруппы в выбранном пространстве $X_{q,\omega}$ воспользуемся результатом об обратимости классического преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [5]). Умножим $e^{tA(\cdot)}$ на некоторую функцию $\widetilde{K}(\cdot)$ так, чтобы $e^{tA(\cdot)}\widetilde{K}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Из оценки (6) следует, что такая функция $\widetilde{K}(\cdot)$ должна удовлетворять при $|\sigma| \to \infty$ условию $\widetilde{K}(\sigma) = O\left(\frac{1}{(1+|\sigma|)^{h_0}}\right)$, $h_0 > h + 1/2$. Тогда, по теореме Planшереля, найдется функция $S_t(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, равная обратному преобразованию Фурье функции $e^{tA(\cdot)}\widetilde{K}(\cdot)$:

$$S_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(\sigma)}\widetilde{K}(\sigma)\right)(x), \qquad x, \sigma \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{11}$$

С другой стороны, если разделить $e^{tA(\sigma)}$ на $(1 - i\sigma)^{h+1}$, то, также в силу теоремы Планшереля, найдется функция $g_t(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которой выполняется

$$g_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{tA(\sigma)}}{(1 - i\sigma)^{h+1}}\right)(x), \qquad x, \sigma \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

следовательно, по свойствам преобразования Фурье, она определяет обобщенное обратное преобразование Фурье матричной экспоненты в виде:

$$G_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(\sigma)}\right)(x) = P_{h+1}\!\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_t(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

где $P_{h+1}(\cdot)$ — некоторый многочлен степени $h+1$. В итоге получаем следующее обобщенное равенство в пространстве $\left(W_{M,\frac{1}{\beta}}\right)'$:

$$S_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(\sigma)}\widetilde{K}(\sigma)\right)(x) = P_{h+1}\!\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_t(x) * K(x) = g_t(x) * \left[P_{h+1}\!\left(\frac{d}{dx}\right) K(x)\right].$$

Покажем, что, несколько усилив требования к функции $K(\cdot)$, можно для любого $f \in X_{q,\omega}$ получить равенство

$$(S_t * f)(x) = (G_t * K * f)(x) = g_t(x) * \left[P_{h+1}\!\left(\frac{d}{dx}\right) K(x) * f(x)\right] \tag{12}$$

уже не в обобщенном смысле, а в пространстве $X_{q,\omega}$. Тем самым мы определим операторы свертки с ядром $S_t(\cdot)$, действующие в пространстве $X_{q,\omega}$. Это и будет регуляризованная полугруппа. Равенство (12) описывает структуру этой полугруппы.

План обоснования предложенной конструкции состоит в следующем:
1) определить свертку любой функции $f(\cdot) \in X_{q,\omega}$ с построенной по формуле (11) функцией $S_t(\cdot)$;
2) показать, что $S_t * f \in X_{q,\omega}$ при любом $f \in X_{q,\omega}$;
3) доказать ограниченность операторов свертки с ядром $S_t(\cdot)$ в пространстве $X_{q,\omega}$;
4) показать справедливость равенства (12) в $X_{q,\omega}$;
5) показать, что для любого $f \in X_{q,\omega}$ функция $(S_t * f)(\cdot)$ является обобщенным решением задачи Коши (1), (2) с начальным условием $(K * f)(\cdot)$;
6) доказать, что для любого f из области определения оператора $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ функция $(S_t * f)(\cdot)$ является классическим решением задачи Коши (1), (2) с начальным условием $(K * f)(\cdot)$.

Тем самым будет доказано, что операторы свертки с ядром $S_t(\cdot)$:

$$S(x;t)f(x) = (S_t * f)(x), \qquad t \in [0; T_1), \quad x \in \mathbb{R},$$

образуют R–полугруппу в пространстве $X_{q,\omega}$ с оператором R свертки с ядром $K(\cdot)$, определяемым формулой (10). □

2). Случай $\mu \leq 0$. Как было указано выше, в этом случае обобщенное решение задачи Коши (1), (2) существует при любом $f \in \mathcal{S}'$ и принадлежит $\mathcal{S}'$. Поскольку $\mathcal{S}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, пространство $\mathcal{S}'$ содержит все регулярные функционалы, порожденные функциями любого степенного роста.

Рассмотрим пространство $X_{q,\omega} = L_q^\omega(\mathbb{R})$ функций, интегрируемых со степенью q с весом $\omega(x) = (1+|x|)^{-\gamma}$, $\gamma \geq 1$, то есть пространство функций $f(\cdot)$, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q (1+|x|)^{-\gamma}\, dx < \infty.$$

Очевидно, имеет место вложение $X_{q,\omega} \subset \mathcal{S}'$.

Как и в предыдущем случае, в выбранном пространстве X_γ можно построить регуляризованную полугруппу операторов.

Теорема 5. *Оператор* $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *порождает в пространстве* $X_{q,\omega}$ R*–полугруппу с оператором* R*, определяемым равенством*

$$Rf(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\frac{f(\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R},$$

и интегрируемой функцией $K(\cdot)$*, преобразование Фурье которой удовлетворяет при* $|\sigma| \to \infty$ *условию* $\widetilde{K}(\sigma) = O\left((1+|\sigma|)^{-(r+3+\varepsilon)}\right)$*, где* $\varepsilon > 0$*,* $r = \max\limits_{m=\overline{0,k}}\{h - \mu m\}$*,* $k = \left[\frac{\gamma-1}{q}\right]$*.*

Список литературы

[1] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 276с.

[2] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 308с.

[3] *Мельникова И.В., Альшанский М.А.* Корректность задачи Коши в банаховом пространстве: регулярный и вырожденный случаи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. Анализ-9 / ВИНИТИ, 1995. — *27*. — С. 5–64. English transl. in J. Math. Sci. — Plenum Press, 1998. — *87*, №4. — С. 3732–3777.

[4] *Мельникова И.В.* Полугрупповая регуляризация некорректных задач// Докл. РАН. — 2003. — *393*, № 6. — С. 1–5

[5] *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504с.

[6] *Tanaka N. and Okazawa N.* Local C-semigroups and local integrated semigroups. // Proc. London Math. Soc. — 1990. — *61*, №3. — С. 63-90

Ануфриева У.А., Уральский государственный университет, Мат.–мех., Екатеринбург, пр. Ленина, 51. 620083 Россия

E-mail: `Uljana.Anufrieva@usu.ru`

U. A. Anufrieva *Semigroups, connected with Petrovsky correct systems*

R–semigroups for Petrovsky correct systems of differential equations are constructed in spaces $L_q(\mathbb{R}^n)$ equipped by a weight.

О ПРОБЛЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КЛАССОВ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Г. С. Балашова
МЭИ (ТУ)
Москва, Россия

Рассматриваются классы $\hat{C}_R\{M_n\}$ бесконечно дифференцируемых на всей оси периодических функций, определяемые некоторой положительной последовательностью $\{M_n\}$. Установлена эквивалентность классов $\hat{C}_R\{M_n\}$ и $\hat{C}_R\{M_n^c\}$ и показано, что из полученного результата следует известный результат Мандельбройта С. об эквивалентности классов $C_R\{M_n\}$ и $C_R\{M_n^c\}$.

Рассматриваются классы бесконечно дифференцируемых на интервале J функций, определяемые некоторой положительной последовательностью $\{M_n\}$

$$C_J\{M_n\} = \{f(x) \in C^\infty(J) : \ |f^{(n)}(x)| \le K^n M_n, \ n \ge 1, \ x \in J\}, \tag{1}$$

где каждая функция ограничена по модулю для всех $x \in J$ и константа $K > 0$ зависит только от функции $f(x)$.

Карлеман Т. [1] поставил проблему: Указать условия, которым надо подчинить последовательности $\{M_n\}$ и $\{M'_n\}$, чтобы имело место вложение

$$C_J\{M_n\} \subset C_J\{M'_n\}.$$

Решение этой проблемы позволяет решить проблему эквивалентности классов, состоящую в нахождении таких условий, при которых две последовательности определяют один и тот же класс, т.е. одновременно

$$C_J\{M_n\} \subset C_J\{M'_n\} \quad \text{и} \quad C_J\{M'_n\} \subset C_J\{M_n\}. \tag{2}$$

Таким образом, по заданной последовательности $\{M_n\}$ надо построить более регулярную последовательность $\{M'_n\}$, чтобы имели место вложения (2).

Построение такой последовательности существенно зависит от природы интервала J (открытый, замкнутый, конечный или бесконечный). Остановимся на случае $J = R$ — всей оси, при этом естественно рассматривать последовательность $\{M_n\}$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty. \tag{3}$$

Тогда, как показал С. Мандельбройт [2], класс $C_R\{M_n\}$ эквивалентен классу $C_R\{M_n^c\}$, где $\{M_n^c\}$ есть выпуклая регуляризация посредством логарифмов последовательности $\{M_n\}$, существование которой возможно в силу условия (3).

Возникает вопрос, представляет ли последовательность $\{M_n^c\}$ "наилучшим образом" соответствующий класс функций, т. е. существует ли, например, такая последовательность $\{A_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_n}{M_n^c}\right)^{\frac{1}{n}} = 0 \tag{4}$$

и при этом классы $C_R(A_n)$ и $C_R(M_n^c)$ эквивалентны. При выполнении условия (4), очевидно,

$$C_R(A_n) \subset C_R(M_n^c),$$

таким образом, остается установить, имеет ли место обратное вложение

$$C_R(M_n^c) \subset C_R(A_n).$$

Теорема (С. Мандельбройт [3]). *Если* $\lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}} = \infty$, *то какова бы ни была последовательность* $\{A_n\}$, *удовлетворяющая условию* (4), *существует периодическая функция, принадлежащая* $C_R\{M_n^c\}$ *и не принадлежащая* $C_R\{A_n\}$.

Теоремы вложения для пространств Соболева бесконечного порядка позволили получить новые результаты в рассматриваемой проблеме.

Напомним результат (см. [4]) для пространств Соболева бесконечного порядка

$$W^\infty \{a_n, p, r\}_{(T)} \equiv \{f(x) \in C^\infty(R) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\|f^{(n)}(x)\right\|_r^p < \infty\}, \tag{5}$$

где $\left\|f^{(n)}(x)\right\|_r = \left(\int_T \left|f^{(n)}(x)\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$, $r \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $a_n \geq 0$, $a_0 \neq 0$.

Пространство (5) нетривиально и бесконечномерно, как показано Ю. А. Дубинским [5], тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 0$$

Это условие впредь предполагается выполненным.

Теорема 1. *Если для последовательностей* $\{a_n\}$ *и* $\{c_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0,$$

то имеет место вложение

$$W^\infty \{c_n, p, r\}_{(T)} \subset W^\infty \{a_n, p, r\}_{(T)},$$

причем оно компактное.

Если рассмотреть более узкие классы бесконечно дифференцируемых на всей прямой периодических функций

$$\hat{C}_R\{M_n\} \equiv \{f(x) \in C^\infty(R) : \max_{x\in T} |f^{(n)}(x)| \leq \lambda(f) M_n,\ n = 0, 1, \ldots,\ M_0 = 1\},$$

с последовательностью $\{M_n\}$, удовлетворяющей условию (3), то они также эквивалентны классам $\hat{C}_R\{M_n^c\}$, т. е. справедлива

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$ *и для некоторой последовательности* v_n: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n < \infty$

$$A_n = \bar{\bar{o}}(M_n v_n), \tag{6}$$

то имеет место строгое вложение

$$\hat{C}_R\{A_n\} \subset \hat{C}_R\{M_n\},$$

т. е.

$$\hat{C}_R\{M_n\} \setminus \hat{C}_R\{A_n\} \neq \emptyset \tag{7}$$

Доказательство. Из определения класса $\hat{C}_R\{A_n\}$ и условия (6) следует, что

$$\hat{C}_R\{A_n\} \subset W^\infty\{A_n^{-1} v_n, 1, \infty\}. \tag{8}$$

Представим условие (6) в виде

$$\frac{M_n^{-1}}{A_n^{-1} v_n} = \frac{a_n}{c_n} = \bar{\bar{o}}(1),$$

тогда по Теореме 1 получаем, что

$$W^\infty \left\{A_n^{-1} v_n, 1, \infty\right\}_{(T)} \subset W^\infty \left\{M_n^{-1}, 1, \infty\right\}_{(T)}, \tag{9}$$

причем вложение компактное. Так как оба пространства в (9) банаховы и бесконечномерные, то вложение (9) строгое, т. е.

$$W^{\infty}\left\{M_n^{-1},1,\infty\right\}_{(T)}\setminus W^{\infty}\left\{A_n^{-1}v_n,1,\infty\right\}_{(T)}\neq\emptyset.$$

тем более (см. (8))

$$W^{\infty}\left\{M_n^{-1},1,\infty\right\}_{(T)}\setminus \hat{C}_R\{A_n\}\neq\emptyset. \tag{10}$$

Поскольку, как следует из определения классов, имеет место вложение

$$W^{\infty}\left\{M_n^{-1},1,\infty\right\}_{(T)}\subset \hat{C}_R\{M\},$$

то с учетом соотношения (10) получаем справедливость (7). Теорема доказана. □

Замечание. Теорема Мандельбройта является следствием теоремы 2.

В самом деле, условие (4) представим в виде

$$A_n=M_nv_n,$$

где

$$\lim_{n\to\infty}v_n^{\frac{1}{n}}=0. \tag{11}$$

Покажем, что в этом случае

$$C_R\{A_n\}\subset\hat{C}_R\{M_n\}. \tag{12}$$

Если $f(x)\in C_R\{A_n\}$, то существует постоянная $K=K(f)>0$, такая, что

$$\max_{x\in T}|f^{(n)}(x)|\leq K^nA_n,\quad n=1,2,\ldots. \tag{13}$$

В силу условия (11) для любого $K>0$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_nK^n<\infty$, поэтому последовательность v_nK^n ограничена, т. е. $\max\limits_n|v_nK^n|=\lambda<\infty$, и тогда имеем

$$\lambda M_n=\lambda v_n^{-1}A_n\geq K^nA_n,\quad n=1,2,\ldots \tag{14}$$

Для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (13), с учетом (14) получаем

$$\max_{x\in T}|f^{(n)}(x)|\leq\lambda M_n,\quad n=1,2,\ldots$$

Это значит, что $f(x)\in\hat{C}_R\{M_n\}$, т. е. справедливость вложения (12) доказана.

Определение классов $C_R\{A_n\}$, $\hat{C}_R\{M_n\}$ и вложение (12) позволяют записать цепочку вложений

$$C_R\{A_n\}\subset\hat{C}_R\{M_n\}\subset\hat{C}_R\{2^nM_n\}\subset C_R\{M_n\},$$

из которой с учетом теоремы 2 следует справедливость теоремы Мандельбройта.

Список литературы

[1] *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926.

[2] *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. Москва, 1955.

[3] *Mandelbrojt S.* Series de Fourier et classes quasi analytiques de Fonctions, Paris, 1935.

[4] *Балашова Г.С.* Об условиях продолжения следа и вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций. // Математический сборник, 1993 г., т. 184, №1, с. 105-128.

[5] *Dubinskij Ju.A.* Sobolev spaces of infinite order and differential equations. Leipzig, 1986 г.

Балашова Г. С., профессор, д. ф.-м. н., Московский Энергетический Институт (Технический университет), 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14. Россия.

E-mail: `BalashovaGS@mpei.ru`

О ЗАДАЧЕ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА С УСЛОВИЯМИ РОСТА

С. И. Безродных
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
Москва, Россия

Рассмотрена задача Римана — Гильберта во внешности круга с условием роста во внутренней точке области и аналогичная задача в полуплоскости с условием роста в граничной точке. Доказаны теоремы о разрешимости этих задач и построены их решения.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о построении аналитической в области функции по заданному соотношению между ее вещественной и мнимой частями на границе, называемая задачей Римана — Гильберта, так же, как и тесно связанная с ней задача сопряжения двух аналитических функций в смежных областях, исследовалась во многих работах, см., например, [1]-[7]. В данной работе на основе подхода, развитого в цитированных работах, детально изучена задача Римана — Гильберта с условиями роста решения в некоторых точках области или ее границы. Такая постановка возникает, в частности, при моделировании некоторых явлений в физике плазмы [8]-[10]. Решение рассматриваемой задачи с конечным числом точек роста (особых точек) сводится, в силу ее линейности, к сумме решений задачи Римана — Гильберта с одной особой точкой, расположенной либо внутри, либо на границе области. Последние с помощью конформного отображения приводятся к соответствующим задачам в канонических областях. В настоящей работе в качестве канонической области для случая внутренней особой точки выбрана внешность единичного круга, а сама точка роста расположена в бесконечности; для случая граничной особой точки в качестве канонической области выбрана полуплоскость, а точка роста — опять бесконечность (но теперь это граничная точка).

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕШНОСТИ КРУГА

1.1. Постановка задачи и приведение к задаче сопряжения. Обозначим через $\mathbb{K}^+$ и $\mathbb{K}^-$ соответственно внешность и внутренность единичного круга на замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ комплексного переменного $z = x + iy$:

$$\mathbb{K}^+ := \{z : |z| > 1\}, \qquad \mathbb{K}^- := \{z : |z| < 1\},$$

а через $\mathbb{T}^+$ и $\mathbb{T}^-$ — границы областей $\mathbb{K}^+$ и $\mathbb{K}^-$, представляющие собой единичную окружность с направлением обхода соответственно по и против часовой стрелки. Если функция F однозначна и аналитична в области B (если она непрерывна на множестве M), то это будем обозначать $F \in \mathcal{O}\,(B)$ (соответственно $F \in C(M)$). Запись $F(z) = O^\star(z^\alpha)$, $z \to \infty$ $(\alpha > 0)$, будет означать $F(z) = c\,z^\alpha + o(z^\alpha)$, $z \to \infty$, где $c \neq 0$.

Пусть на $\mathbb{T}^+$ заданы комплексная функция $h(t)$ и вещественная функция $c(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\mu \le 1$, причем $h(t)$ не обращаются в нуль ни при каком $t \in \mathbb{T}^+$. Постановка *задачи Римана — Гильберта* заключается в следующем: найти однозначную аналитическую в области $\mathbb{K}^+ \setminus \{\infty\}$ функцию $\mathcal{P}^+(z)$, непрерывную в $\overline{\mathbb{K}^+} \setminus \{\infty\}$, т.е.

$$\mathcal{P}^+ \in \mathcal{K}^+ := \mathcal{O}\big(\mathbb{K}^+ \setminus \{\infty\}\big) \cap C\big(\overline{\mathbb{K}^+} \setminus \{\infty\}\big),$$

имеющую в точке $z = \infty$ полюс n–го порядка:

$$\mathcal{P}^+(z) = O^\star(z^n), \qquad z \to \infty \tag{1}$$

и удовлетворяющую на единичной окружности краевому условию

$$\operatorname{Re}\,[\,h(t)\,\mathcal{P}^+\,(t)\,] \,=\, c\,(t), \qquad t \in \mathbb{T}^+. \tag{2}$$

С помощью подхода [3]-[5] задача Римана — Гильберта сводится к задаче сопряжения

$$\mathcal{P}^+(t) \,=\, G\,(t)\,\mathcal{P}^-(t) + f(t), \qquad t\in\mathbb{T}^+, \tag{3}$$

где функции $\mathcal{P}^+(z)$ и $\mathcal{P}^-(z)$ принадлежат соответственно $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^- := \mathcal{O}\big(\mathbb{K}^-\setminus\{0\}\big)\cap$ $\cap\, C\big(\overline{\mathbb{K}^-}\setminus\{0\}\big)$ и связаны условием

$$\mathcal{P}^-(z) = \overline{\mathcal{P}^+}(\overline{z^{-1}}\,), \qquad z\in\mathbb{K}^-, \tag{4}$$

которое, следуя [11], будем называть условием комплексного уравновешивания. Функции $G(t)$ и $f(t)$ в формуле (3) определяются равенствами

$$G(t) \,= \exp\big[2\,i\,\Theta(t)\big], \quad \Theta(t) = \arg\big[i\,\overline{h}\,(t)\,\big]; \qquad f(t) \,= 2\,c(t)\,\big[h(t)\big]^{-1}\,; \tag{5}$$

функция $G(t)$ непрерывна и отлична от нуля при всех $t\in\mathbb{T}^+$. Отметим, что согласно (1), (4) функция $\mathcal{P}^-(z)$ имеет полюс n–го порядка в начале координат.

Решение задачи (1), (3), (4) будем искать в виде суммы общего решения $\Psi^\pm(z)$ однородной и некоторого решения $\psi^\pm(z)$ неоднородной задачи сопряжения: $\mathcal{P}^\pm(z) = \Psi^\pm(z)+\psi^\pm(z)$.

1.2. Решение однородной задачи. Пусть функции $\Psi^+\in\mathcal{K}^+$ и $\Psi^-\in\mathcal{K}^-$ составляют решение однородной задачи (1), (3), (4), где $c=0$, т.е. удовлетворяют соотношениям

$$\Psi^+(t) \,=\, G(t)\Psi^-(t),\; t\in\mathbb{T}^+\,; \quad \Psi^-(z) = \overline{\Psi^+}(\overline{z^{-1}}\,),\; z\in\mathbb{K}^-; \quad \Psi^+(z) = O^\star(z^n),\; z\to\infty. \tag{6}$$

Обозначим через $\varkappa$ *индекс граничной функции* h, т.е. целое число, равное деленному на 2π приращению аргумента этой (непрерывной и не равной нулю) функции при обходе $\mathbb{T}^+$:

$$\varkappa := \operatorname{ind} h \,=\, (2\,\pi)^{-1}\,\Delta_{\mathbb{T}^+}\,\arg h. \tag{7}$$

Принимая во внимание соотношения (5), (7), находим, что индекс коэффициента G в краевом условии (6), равен

$$\operatorname{ind} G := (2\,\pi)^{-1}\,\Delta_{\mathbb{T}^+}\,\arg G \,=\, -\,2\,\varkappa,$$

а индекс функции $g(t) := t^{-2\varkappa}\,G(t)$ по контуру $\mathbb{T}^+$ равен нулю. Перепишем краевое условие (6), используя $g(t)$ вместо $G(t)$: $\Psi^+(t) \,=\, t^{2\varkappa}\,g(t)\,\Psi^-(t)$, $t\in\mathbb{T}^+$, и будем искать Ψ^+ и Ψ^- в виде произведения $\Psi^\pm(z) \,=\, \varphi^\pm\,(z)\,\Phi^\pm\,(z)$, $z\,\in\,\mathbb{K}^\pm$, где функции $\varphi^+\in\mathcal{K}^+$ и $\varphi^-\in\mathcal{K}^-$ подчиним условиям

$$\varphi^+(t) \,=\, g(t)\,\varphi^-(t),\;\; t\in\mathbb{T}^+; \quad \varphi^-(z) = \overline{\varphi^+}(\overline{z^{-1}}\,),\;\; z\in\mathbb{K}^-; \quad \varphi^+(z) = O^\star(1),\;\; z\to\infty. \tag{8}$$

Тогда функции $\Phi^+\in\mathcal{K}^+$ и $\Phi^-\in\mathcal{K}^-$, как это следует из способа представления $\Psi^\pm$ и из (6), (8), являются решением следующей задачи

$$\Phi^+(t) \,=\, t^{2\varkappa}\,\Phi^-(t),\; t\in\mathbb{T}^+; \quad \Phi^-(z) := \overline{\Phi^+}(\overline{z^{-1}}\,),\; z\in\mathbb{K}^-; \quad \Phi^+(z) = O^\star(z^n),\; z\to\infty. \tag{9}$$

Приступая к построению φ^+ и φ^-, заметим, прежде всего, что эти регулярные в $\mathbb{K}^+$ и $\mathbb{K}^-$ функции не обращаются в нуль соответственно в замыканиях этих областей, в чем нетрудно убедиться, используя обобщенный принцип аргумента [3]. Таким образом, функции $\ln\varphi^+(z)$ и $\ln\varphi^-(z)$ являются регулярными и однозначными соответственно в $\mathbb{K}^+$ и $\mathbb{K}^-$. Логарифмируя первое равенство (8), приходим к задаче об их нахождении по заданному скачку на единичной окружности. Выбирая решение последней задачи, удовлетворяющее условию комплексного уравновешивания, находим, что решение задачи (8) единственно с точностью до (мультипликативной) вещественной постоянной, которую полагаем равной нулю, и имеет вид

$$\varphi^\pm(z) \,=\, \exp\big[\,i\,\nu\, + \Gamma^\pm(z)\,\big]; \tag{10}$$

$$\Gamma^\pm(z) := \pi^{-1}\int_{\mathbb{T}^+}\frac{\theta(t)\,dt}{t-z}, \quad z\in\mathbb{K}^\pm; \qquad \nu = -(2\,\pi\,i)^{-1}\int_{\mathbb{T}^+}\theta(t)\,t^{-1}\,dt\,, \tag{11}$$

где $\theta(t)$ определяется равенством $\theta(t) := (1/2)\arg g(t) \,=\, \arg t^{-\varkappa} \,+\, \Theta(t)$,

Приступим к построению функций Φ^+ и Φ^-, заметив, что необходимо отдельно рассматривать случаи, когда индекс $\varkappa$ граничной функции превышает или не превышает порядка полюса n, т.е. i) $\varkappa\le n$, ii) $\varkappa > n$.

i) Поскольку Φ^+ и Φ^- имеют полюсы порядка n соответственно в бесконечно удаленной точке и в начале координат, то функции $\Phi_0^+(z) := z^{-n}\,\Phi^+(z)$, $\Phi_0^-(z) := z^n\,\Phi^-(z)$ регулярны в областях $\mathbb{K}^+$ и $\mathbb{K}^-$. Используя первое равенство (9), сформулируем условие на единичной окружности для функций $\Phi_0^\pm$: $t^{2N}\,\Phi_0^+(t) = \Phi_0^-(t)$, $t \in \mathbb{T}^+$, где $N := n - \varkappa$. Из него вытекает, что $z^{2N}\,\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$ образуют единую аналитическую во всей конечной плоскости функцию, которая имеет на бесконечности полюс порядка $2N$ и, следовательно, является многочленом. Обозначая его коэффициенты через a_{k-N}, $k = 0, 1, \ldots 2N$, подчиняя $\Phi_0^\pm$ условию комплексного уравновешивания, находим $a_{k-N} = \overline{a}_{N-k}$, $k = 0, \ldots, N$ и выписываем выражения для $\Phi_0^\pm$: $\Phi_0^\pm(z) = z^{\mp N}\,Q(z)$, где

$$Q(z) := a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k\, z^k + \overline{a}_k\, z^{-k} \right), \quad \operatorname{Im} a_0 = 0\,. \tag{12}$$

Таким образом, решение задачи (9) имеет вид $\Phi^\pm(z) = z^{\pm\varkappa}\,Q(z)$, и, возвращаясь теперь к решению $\Psi^\pm$ задачи (6), формулируем следующее

Предложение 1. *При выполнении неравенства $\varkappa \le n$ решение $\Psi^\pm \in \mathcal{K}^\pm$ задачи (6) представимо в виде $\Psi^\pm(z) = z^{\pm\varkappa} Q(z) \exp\left[i\,\nu + \Gamma^\pm(z)\right]$. Функции Ψ^+ и Ψ^- определены с точностью до $N = n - \varkappa$ комплексных постоянных $a_1, \ldots, a_N$, $a_N \ne 0$ и вещественной постоянной a_0.*

ii) Если выполняется неравенство $\varkappa > n$, то, переписывая краевое условие (9) в терминах $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$, приходим к выводу, что функции $z^{2(n-\varkappa)}\,\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$ образуют единую аналитическую в $\overline{\mathbb{C}}$ функцию, исчезающую на бесконечности; такая функция есть тождественный нуль. Отсюда следует

Предложение 2. *При выполнении неравенства $\varkappa > n$ задача для $\Psi^\pm \in \mathcal{K}^\pm$ с условиями (6) не имеет решений таких, что $\Psi^+(z)$ растет не быстрее, чем $O^\star(z^n)$, при $z \to \infty$.*

С учетом того, что функция Ψ^+, представляющая решение задачи (6) в области $\mathbb{K}^+$, удовлетворяет однородной краевому условию (2), из предложений 1, 2 следует

Теорема 1. (i) *Если $N = n - \varkappa \ge 0$, то решение $\Psi^+ \in \mathcal{K}^+$ однородной задачи Римана — Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}\left[\,h(t)\,\Psi^+(t)\right] = 0$, $t \in \mathbb{T}^+$ и условием роста $\Psi^+(z) = O^\star(z^n)$, $z \to \infty$, имеет следующий вид:*

$$\Psi^+(z) = z^{\varkappa} Q(z) \exp\left[i\,\nu + \Gamma^+(z)\right], \qquad z \in \mathbb{K}^+,$$

где число ν и функции $\Gamma^+(z)$ и $Q(z)$ даются соотношениями (11), (12). Функция Ψ^+ определена с точностью до произвольных N комплексных постоянных $a_1, \ldots, a_N$, $a_N \ne 0$ и одной вещественной постоянной a_0.

(ii) *При $N < 0$ однородная задача Римана — Гильберта в классе $\mathcal{K}^+$ с указанным условием роста неразрешима.*

1.3. Частное решение неоднородной задачи. Построим некоторые функции $\psi^+ \in \mathcal{K}^+$ и $\psi^- \in \mathcal{K}^-$, удовлетворяющие условию сопряжения (3) и условию комплексного уравновешивания, т.е.

$$\psi^+(t) = t^{2\varkappa}\, g(t)\, \psi^-(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{T}^+, \qquad \psi^-(z) = \overline{\psi^+}(\overline{z^{-1}}\,), \quad z \in \mathbb{K}^-, \tag{13}$$

причем полагаем, что $\psi^+(z)$ имеет на бесконечности порядок роста не выше $O^\star(z^n)$. В (13) учтено, что $G(t) = t^{2\varkappa}\, g(t)$; напомним, что $\operatorname{ind} G(t) = -2\varkappa$ и $\operatorname{ind} g = 0$.

Функции $\psi^\pm$ будем искать в виде произведения $\psi^\pm(z) = \varphi^\pm(z)\,\mathcal{F}^\pm(z)$, в котором φ^+ и φ^- являются решением задачи (8) и даются формулами (10), (11), а функции $\mathcal{F}^\pm \in \mathcal{K}^\pm$, следовательно, являются решением задачи

$$\mathcal{F}^+(t) = t^{2\varkappa}\,\mathcal{F}^-(t) + f(t)\left[\varphi^+(t)\right]^{-1}; \qquad \mathcal{F}^-(z) = \overline{\mathcal{F}^+}(\overline{z^{-1}}\,), \quad z \in \mathbb{K}^-, \tag{14}$$

причем $\mathcal{F}^+(z)$ растет не быстрее $O^\star(z^n)$ при $z = \infty$.

i) Если $\varkappa \le n$, то функции $\mathcal{F}^{\pm}(z)$, определяемые по формуле $\mathcal{F}^{\pm}(z) = z^{\pm\varkappa}\,\Xi^{\pm}(z)$, где $\Xi^{\pm}(z)$ даются равенствами

$$\Xi^{\pm}(z) := -(4\pi i)^{-1}\int_{\mathbb{T}^+}\xi(t)\,t^{-1}\,dt \;+\; (2\pi i)^{-1}\int_{\mathbb{T}^+}\frac{\xi(t)\,dt}{t-z}\,, \qquad \xi(t) := \frac{t^{-\varkappa} f(t)}{\varphi^+(t)}, \tag{15}$$

удовлетворяют указанным требованиям.

ii) Если же $\varkappa > n$, то решения задачи (14), имеющего на бесконечности порядок роста не выше $O^{\star}(z^n)$, вообще говоря, не существует, и для разрешимости задачи необходимы следующие условия

$$\int_{\mathbb{T}^+}\xi(t)\,t^{k-1}\,dt \;=\; 0, \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,|N|-1; \qquad \xi(t) = t^{-\varkappa} f(t)\,\big[\varphi^+(t)\big]^{-1}, \tag{16}$$

означающие наличие у функции $\Xi^+(z)$ нуля порядка $\varkappa - n$ в точке $z = \infty$. Справедливо следующее

Предложение 3. (i) *При выполнении неравенства $\varkappa \le n$ функции $\psi^{\pm} \in \mathcal{K}^{\pm}$, определяемые по формуле*

$$\psi^{\pm}(z) = z^{\pm\varkappa}\exp\big[\,i\,\nu \;+\; \Gamma^{\pm}(z)\,\big]\,\Xi^{\pm}(z), \qquad z \in \mathbb{K}^{\pm}, \tag{17}$$

удовлетворяют условиям задачи сопряжения (13), и для них справедливы следующие оценки: $\psi^+(z) = O^{\star}(z^{\varkappa}),\ z \to \infty$; $\psi^-(z) = O^{\star}(z^{-\varkappa}),\ z \to 0$.

(ii) *Если $\varkappa > n$ и выполнены условия (16), то единственным решением задачи сопряжения (13) из классов $\mathcal{K}^{\pm}$ являются функции $\psi^{\pm}(z)$, определяемые по формуле (17), причем $\psi^+(z) = O^{\star}(z^n),\ z \to \infty$; $\psi^-(z) = O^{\star}(z^{-n}),\ z \to 0$. Если $\varkappa > n$ и условия (16) не выполнены, то задача (13) в классах $\mathcal{K}^{\pm}$ не имеет решений, растущих не быстрее $O^{\star}(z^n)$, $z \to \infty$.*

1.4. Общее решение неоднородной задачи во внешности круга. Заметим, что разность любых двух решений $\mathcal{P}_1^+$ и $\mathcal{P}_2^+$ задачи Римана — Гильберта (1), (2) является решением Ψ^+ однородной задачи (6) и, следовательно, полное решение задачи (1), (2) получается добавлением некоторого частного решения ψ^+ к решению Ψ^+ однородной задачи (6): $\mathcal{P}^+ = \Psi^+ + \psi^+$. Таким образом, из теоремы 1 и предложения 3 вытекает следующая теорема, где $\varkappa$, ν, $\Gamma^+(z)$, $Q(z)$ и $\Xi^+(z)$ даются равенствами (7), (11), (12) и (15).

Теорема 2. (i) *Если $\varkappa \le n$, то решение $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{K}^+$ задачи Римана — Гильберта (1), (2) имеет вид*

$$\mathcal{P}^+(z) = z^{\varkappa}\exp\big[\,i\,\nu + \Gamma^+(z)\big]\Big[Q(z) + \Xi^+(z)\Big], \qquad z \in \mathbb{K}^+, \tag{18}$$

и определено с точностью до произвольных $N = n - \varkappa$ комплексных постоянных $a_1,\,\ldots,\,a_N,\ a_N \ne 0$ и одной вещественной постоянной a_0.

(ii) *Если $\varkappa > n$ и выполнены условия (16), то задача Римана — Гильберта (1), (2) в классе $\mathcal{K}^+$ имеет единственное решение (18), где $Q(z) = 0$. Если при $\varkappa > n$ условия (16) не выполнены, то задача (1), (2) в классе $\mathcal{K}^+$ не имеет решений.*

1.5. Неоднородная задача во внешности круга с заданными коэффициентами в главной части. Рассмотрим задачу Римана — Гильберта для функции $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{K}^+$, удовлетворяющей краевому условию (2) и имеющей вид

$$\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{P}_0^+(z) + A^+(z), \qquad A^+(z) := A_1\,z + A_2\,z^2 + \,\ldots\, + A_n\,z^n\,,$$

где $\mathcal{P}_0^+(z)$ — регулярная в $\mathbb{K}^+$ часть функции $\mathcal{P}^+(z)$, а ее главная часть $A^+(z)$ задана, иначе говоря, коэффициенты A_k определены.

Введем функцию $a^+(z)$ по формуле $a^+(z) := -z^{\mp\varkappa}A^+(z)\big[\varphi^+(z)\big]^{-1}$, а функцию $Q(z)$ — по формуле $Q(z) := \sum_{k=1}^{N}\big(a_k\,z^k + \overline{a}_k\,z^{-k}\big)$, где числа a_k являются коэффициентами в разложении $a^+(z)$ в точке $z = \infty$: $a^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N-k}z^{N-k}$. При $N = n - \varkappa < 1$ функция $Q(z)$ считается равной нулю. Положим также по определению $A_0^+(z) := a^+(z) - Q(z)$.

Теорема 3. (i) *Если $\varkappa \le 0$, то решение $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{K}^+$ задачи Римана — Гильберта (1), (2) с заданной главной частью $A^+(z)$ имеет вид*

$$\mathcal{P}^+(z) = z^{\varkappa} \exp\left[\, i\,\nu\, + \Gamma^+(z)\,\right] \left[b_0 \,+\, \sum_{k=1}^{|\varkappa|} \left(b_k\, z^k + \overline{b}_k\, z^{-k} \right) + A_0^+ \,+\, \Xi^+(z) \right] + A^+(z); \qquad (19)$$

это решение определено с точностью до произвольных $|\varkappa|$ комплексных постоянных $b_1, \ldots, b_{|\varkappa|}$, $b_{|\varkappa|} \neq 0$ и одной вещественной постоянной b_0.

(ii) *Если $\varkappa > 0$ и выполнены условия*

$$\int_{\mathbb{T}^+} \left[A_0^+(t) + \xi(t)/2 \right] t^{-1}\, dt \;=\; 0, \qquad \int_{\mathbb{T}^+} \left[A_0^+(t) + \xi(t) \right] t^{k-1}\, dt \;=\; 0, \quad k \le \varkappa - 1, \qquad (20)$$

то задача Римана — Гильберта (1), (2) с заданной главной частью имеет в классе $\mathcal{K}^+$ единственное решение (19), где все $b_k = 0$. Если $\varkappa > 0$ и условия (20) не выполнены, то указанная задача не имеет решений в классе $\mathcal{K}^+$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

2.1. Постановка задачи и приведение к задаче сопряжения. Пусть на вещественной оси $\mathbb{R}$ заданы комплексная функция $h(x)$ и вещественная функция $c(x)$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $h(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \,\in\, (-\infty,\, +\infty)$.

Пусть $\vartheta(x)$ — некоторая ветвь аргумента функции $h(x)$. Обозначим через $2\pi\delta$ разность предельных значений $\vartheta(+\infty)$ и $\vartheta(-\infty)$, а через $\varkappa$ и α — целую и дробную части величины δ, т.е.

$$\delta := (2\pi)^{-1} \left(\vartheta(+\infty) - \vartheta(-\infty) \right), \qquad \varkappa := [\delta], \qquad \alpha := \delta - \varkappa. \qquad (21)$$

Предположим также, что для достаточно больших по модулю x выполняется неравенство $|\vartheta(x) - \vartheta(\pm\infty)| < C\,|x|^{-\mu},\; \mu > 0,\, C > 0$.

Поставим задачу об отыскании аналитической в верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$ функции $\mathcal{P}^+(z)$, непрерывной в $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty\}$, т.е.

$$\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+ := \mathcal{O}\left(\mathbb{H}^+\right) \,\cap\, C\left(\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty\}\right) \qquad (22)$$

и удовлетворяющей на вещественной оси краевому условию

$$\mathrm{Re}\big[h(x)\,\mathcal{P}^+(x)\big] = c(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad (23)$$

Постановка *задачи Римана — Гильберта* (22), (23) будет дополнена ниже некоторым условием роста в точке $z = \infty$.

Обычным образом [3]-[5] сводим эту задачу для $\mathcal{P}^+$ к следующей задаче сопряжения на вещественной оси для функций $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ и $\mathcal{P}^- \in \mathcal{H}^- := \mathcal{O}\left(\mathbb{H}^-\right) \,\cap\, C\left(\overline{\mathbb{H}^-} \setminus \{\infty\}\right)$:

$$\mathcal{P}^+(x) \;=\; [\chi(x)]^{-2\varkappa}\, g(x)\, \mathcal{P}^-(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \mathcal{P}^-(z) = \overline{\mathcal{P}^+}(\overline{z}\,), \quad z \in \mathbb{H}^-. \qquad (24)$$

Фигурирующая здесь функция $\chi(z)$ дается формулой $\chi(z) := (z-a)(z-\overline{a})^{-1}$, где $a \in \mathbb{H}^+$ — некоторая точка верхней полуплоскости, а $g(x)$ и $f(x)$ определяются соотношениями

$$g(x) \;:= \exp\left[2\, i\, \theta(x)\right], \quad \theta(x) := \arg\left[i\, \overline{h}\,(x)\, (x-a)^{2\varkappa}\right]; \qquad f(x) \;:= 2\, c(x) \left[h(x)\right]^{-1},$$

Заметим, что $g(x)$ непрерывна и отлична от нуля при всех $x \in (-\infty,\, +\infty)$.

Решение задачи (24) является суммой общего решения $\Psi^{\pm}(z)$ однородной и некоторого решения $\psi^{\pm}(z)$ неоднородной задачи сопряжения (24): $\mathcal{P}^{\pm}(z) = \Psi^{\pm}(z) + \psi^{\pm}(z)$.

2.2. Однородная задача в верхней полуплоскости. Решение $\Psi^{\pm} \in \mathcal{H}^{\pm}$ однородной задачи сопряжения (24), т.е. задачи

$$\Psi^+(x) \;=\; [\chi(x)]^{-2\varkappa}\, g(x)\, \Psi^-(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \Psi^-(z) = \overline{\Psi^+}(\overline{z}\,), \quad z \in \mathbb{H}^-, \qquad (25)$$

будем искать в виде произведения $\Psi^{\pm}(z) = \varphi^{\pm}(z)\, \Phi^{\pm}(z)$. Фигурирующие здесь функции $\varphi^{\pm} \in \mathcal{H}^{\pm}$ подчиним условиям

$$\varphi^+(x) \;=\; g(x)\, \varphi^-(x), \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \varphi^-(z) = \overline{\varphi^+}(\overline{z}\,), \quad z \in \mathbb{H}^-, \qquad (26)$$

которым, как нетрудно убедиться, удовлетворяют функции, определяемые формулами

$$\varphi^{\pm}(z) \,=\, \exp\big[\,\Gamma^{\pm}(z)\,\big], \qquad \Gamma^{\pm}(z) := \frac{z}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(x)\,dx}{x\,(x-z)}, \quad z\in\mathbb{H}^{\pm}; \tag{27}$$

здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Заметим, что вблизи бесконечно удаленной точки для $\varphi^{\pm}$ справедливы представления $\varphi^{\pm}(z) = z^{2\alpha}\,\varphi_1^{\pm}(z)$, где $\varphi_1^{\pm}(z)$ ограничены и имеют предел при $z\to\infty$.

Из равенств (25) и (26) вытекает, что функции $\Phi^{\pm}\in\mathcal{H}^{\pm}$, фигурирующие в представлении для $\Psi^{\pm}(z)$, удовлетворяют условиям

$$\Phi^{+}(x) \,=\, [\chi(x)]^{-2\varkappa}\,\Phi^{-}(x), \quad x\in\mathbb{R}, \qquad \Phi^{-}(z) = \overline{\Phi^{+}}(\overline{z}\,), \quad z\in\mathbb{H}^{-}. \tag{28}$$

Будем искать неограниченные на бесконечности $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$, имеющие порядок роста $O^{\star}(z^{n})$, $z\to\infty$. При $M := n-2\varkappa\ge 0$ такими функциями являются

$$\Phi^{+}(z) = (z-\overline{a})^{2\varkappa}\,P_M\,(z), \qquad \Phi^{-}(z) = (z-a)^{2\varkappa}\,P_M\,(z);$$

здесь $P_M\,(z)$ — многочлен степени M с вещественными коэффициентами; при $M<0$ не существует $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$, обладающих указанным ростом при $z\to\infty$.

Поскольку функция $\Psi^{+}(z)$, представляющая в верхней полуплоскости решение задачи сопряжения (24), удовлетворяет однородному краевому условию (23), то из приведенных рассуждений вытекает следующая

Теорема 4. (i) *Если $M = n-2\varkappa\ge 0$, то решение $\Psi^{+}\in\mathcal{H}^{+}$ однородной задачи Римана — Гильберта*

$$\mathrm{Re}\big[h(x)\,\Psi^{+}(x)\big] = 0, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{29}$$

с заданным на бесконечности условием роста порядка $O^{\star}(z^{2\alpha+n})$ имеет вид

$$\Psi^{+}(z) = (z-\overline{a})^{2\varkappa}\exp\big[\Gamma^{+}\,(z)\big]\,P_M(z),$$

где $P_M\,(z)$ — многочлен степени M с произвольными вещественными коэффициентами.

(ii) *Если $M<0$, то однородная задача Римана — Гильберта (29) с указанным условием роста для $\Psi^{+}(z)$ не имеет решений в классе $\mathcal{H}^{+}$.*

2.3. Неоднородная задача в верхней полуплоскости. Частное решение $\psi^{\pm}\in\mathcal{H}^{\pm}$ неоднородной задачи (24), будем искать в виде $\psi^{\pm}(z) = \varphi^{\pm}(z)\,\mathcal{F}^{\pm}(z)$, где функции $\varphi^{\pm}$ даются формулами (27), а $\mathcal{F}^{\pm}\in\mathcal{H}^{\pm}$ связаны условием комплексного уравновешивания $\mathcal{F}^{-}(z) = \overline{\mathcal{F}^{+}}(\overline{z}\,)$, удовлетворяют условию сопряжения

$$(x-\overline{a})^{-2\varkappa}\,\mathcal{F}^{+}(x) \,-\, (x-a)^{-2\varkappa}\,\mathcal{F}^{-}(x) = (x-\overline{a})^{-2\varkappa}\,f(x)\,\big[\varphi^{+}(x)\big]^{-1}, \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{30}$$

и имеют на бесконечности порядок не выше $O^{\star}(z^{2\alpha+n})$. При нахождении таких функций рассмотрим отдельно два случая: i) $n\ge 2\varkappa$, ii) $n<2\varkappa$.

i) При выполнении неравенства $n\ge 2\varkappa$ функции $\mathcal{F}^{+}$ и $\mathcal{F}^{-}$, определяемые следующими формулами, удовлетворяют указанным условиям:

$$\mathcal{F}^{+}(z) = (z-\overline{a})^{2\varkappa}\,\eta(z)\Xi^{+}(z), \;\; \mathcal{F}^{-}(z) = (z-a)^{2\varkappa}\,\eta(z)\Xi^{-}(z); \;\; \Xi^{\pm}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\xi(x)\,dx}{x-z}; \tag{31}$$

фигурирующие здесь $\eta(z)$ и $\xi(x)$ даются равенствами

$$\eta(z) := (z-a)^{m}(z-\overline{a})^{m}, \quad m = [n/2]-\varkappa; \qquad \xi(x) := (x-\overline{a})^{-2\varkappa}\,f(x)\,\big[\varphi^{+}(x)\,\eta(z)\big]^{-1}. \tag{32}$$

Таким образом, функции $\psi^{\pm}(z) = \varphi^{\pm}(z)\,\mathcal{F}^{\pm}(z)$, где $\varphi^{\pm}$ определяются соотношениями (27), а $\mathcal{F}^{\pm}$ — равенствами (31), является частным решением задачи (24), имеющим в $z=\infty$ роста не выше $O^{\star}(z^{2\alpha+n})$.

ii) Если справедливо неравенство $n<2\varkappa$, то функция $\eta(z)$, определяемая из (32), имеет полюсы порядка m в точках a и $\overline{a}$. Тогда для регулярности функций $\mathcal{F}^{\pm}$ из (31) необходимо, чтобы функции $\Xi^{\pm}(z)$ имели нуль порядка m соответственно в точках a и $\overline{a}$, что эквивалентно следующим условиям:

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x)\,(x-a)^{k-1}\,dx \;=\; 0, \qquad\qquad k=0,\,1,\,\ldots,\,|m|-1. \tag{33}$$

Нетрудно убедиться с использованием теоремы 4, что при $m<0$ и выполнении условий (33), функции $\psi^{\pm}(z)=\varphi^{\pm}(z)\,\mathcal{F}^{\pm}(z)$, где $\varphi^{\pm}$ даются соотношениями (27), а $\mathcal{F}^{\pm}$ — равенствами (31), принадлежат классам $\mathcal{H}^{\pm}$ и являются единственным решением задачи (24).

Поскольку общее решение задачи Римана — Гильберта (23) является суммой полного решения $\Psi^{+}(z)$ однородной задачи и некоторого частного решения неоднородной, то из приведенных рассуждений и из теоремы 4 вытекает следующая теорема, где, напомним, $\varkappa$ и α даются равенствами (21), а $\Xi^{+}(z)$, $\eta(z)$ и $\xi(z)$ — равенствами (31), (32).

Теорема 5. (i) *Если $M=n-2\varkappa\geq 0$, то решение $\mathcal{P}^{+}\in\mathcal{H}^{+}$ неоднородной задачи Римана — Гильберта (23) с заданным на бесконечности условием роста порядка $O^{\star}(z^{2\alpha+n})$ имеет вид*

$$\mathcal{P}^{+}(z)=(z-\overline{a})^{2\varkappa}\exp\left[\Gamma^{+}\,(z)\right]\,\left[P_M(z)\;+\;\eta(z)\,\Xi^{+}(z)\right]; \tag{34}$$

здесь $P_M\,(z)$ — многочлен степени M с произвольными вещественными коэффициентами.

(ii) *Если $M<0$ и выполнены условия (33), то единственное решение неоднородной задачи Римана — Гильберта (23) с условием роста $O^{\star}(z^{2\alpha+n})$, $z\to\infty$ имеет вид (34), где $P_M=0$. Если $M<0$ и условия (33) не выполнены, то указанная задача не имеет решений в классе $\mathcal{H}^{+}$.*

Автор выражает благодарность В.И.Власову (Вычислительный центр РАН) за руководство работой и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–01–00723), гранта Фонда содействия отечественной науке и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН "Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач"(ГК 10002-251/ОМН-03/026-024/240603-805 от 24.06.2003 г.).

Список литературы

[1] *Гахов Ф.Д.* Краевая задача Римана для систем n пар функций // Успехи матем. наук. 1952. Т. VII. Вып. 4. № 50. С. 3-54.

[2] *Боярский Б.В.* Анализ разрешимости граничных задач теории функций. В сб. "Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного" под ред. А.И.Маркушевича. Физматлит, 1961. С. 57-79.

[3] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1968.

[4] *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[5] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. Наука, 1973.

[6] *Хведелидзе Б.В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ. 1975. Т. 7. С. 5-162.

[7] *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. № 4. С. 67-154.

[8] *Сомов Б.В., Титов В.С., Вернета А.И.* Магнитное пересоединение в солнечных вспышках // Итоги науки и техники. Астрономия. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т.34. С. 136-237.

[9] *Марковский С.А., Сомов Б.В.* Модель магнитного пересоединения в токовом слое с ударными волнами // Физ. солнечной плазмы. М.: Наука, 1989. С. 456-472.

[10] *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана — Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2002. № 3. Т. 42. С. 277-312.

[11] *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к теории упругости. М.–Л. 1935.

Безродных С.И., Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва, 119991, ул. Вавилова, 40, Россия.

E-mail: sergeyib@pochta.ru

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДОВ С КВАДРАТИЧНЫМИ ГАМИЛЬТОНИАНАМИ

Е. В. Иванова
Московский авиационный институт
(государственный технический университет)
Москва, Россия

This article is devoted to considering of motion and radiation of a charged particle in homogeneous magnetic field and field of quadrupole condenser by the integral of motion method and the coherent states method in following cases: electric and magnetic fields arbitrary depends on time, periodical by time fields. Radiation of charge transferring between coherent states is viewed. The radiation of transferring between quasi-energetic states is computed for periodical by time fields. It was noted that effect of amplification of incident radiation on satellite's frequencies is possible.

В работе методом интегралов движения и когерентных состояний рассмотрено движение и излучение заряженной частицы в однородном магнитном поле и поле квадрупольного конденсатора в случае, когда электрическое и магнитное поля зависят от времени произвольным образом, а также в случае периодических по времени полей. Рассмотрено излучение заряда при переходах между когерентными состояниями. Для периодических по времени полей рассчитано излучение при переходах между квазиэнергетическими состояниями. Отмечено, что возможен эффект усиления падающего излучения на частотах сателлитов.

Вопросы движения и излучения заряженных частиц в электромагнитных полях привлекают внимание в связи с проблемами астрофизики, с задачами работы ускорителей и т. п. Особое значение эта проблема приобретает при разработке приборов, в которых используется индуцированное излучение потоков колеблющихся электронов в электромагнитных полях различной конфигурации [1], Однако аналитическое решение подобных задач стандартными методами, особенно в случае переменных полей, удается лишь в немногих случаях. Весьма плодотворным при их решении является метод интегралов движения и связанный с ним метод когерентных состояний [2], [3], разрабатывавшийся для решения задач излучения в работах [4]–[8]. Метод когерентных состояний удобен также и тем, что дает возможность наглядно проследить связь между квантовым и классическим подходом к расчету излучения, свести квантовую задачу к задаче классической.

В настоящей работе рассматривается движение и излучение нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m в зависящем от времени однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}} = \{0,\, 0,\, \mathcal{H}(t)\}$ с векторным потенциалом

$$\vec{\mathcal{A}} = \{-\mathcal{H}y,\, 0,\, 0\} \tag{1}$$

и зависящем от времени неоднородном электрическом поле с потенциалом

$$\varphi = \frac{U(t)}{2R^2}(y^2 - z^2); \quad R = const, \tag{2}$$

который может быть создан при помощи квадрупольного конденсатора. Следует отметить, что потенциалы (1), (2) удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Излучение нерелятивистского заряда в переменном магнитном поле вида (1) рассматривалось методом когерентных состояний в работе [9]. Излучение нерелятивистского заряда в стационарных полях типа (1), (2) рассматривалось в работах [10], [11]. Движение релятивистского заряда в стационарных полях типа (1), (2) рассматривалось в работе [12].

Гамильтониан заряженной частицы в полях (1), (2) записывается в виде

$$H = H_{x,y} + H_z;\;\; P_x = -i\frac{\partial}{\partial x};\;\; \omega_0(t) = \frac{e\mathcal{H}(t)}{m};$$

$$H_{x,y} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \omega_0(t) y P_x + \left[\frac{m}{2}\omega_0(t) + \frac{eU(t)}{2R^2}\right]\; y^2; \tag{3}$$

$$H_z = \frac{P_z^2}{2m} - \frac{eU(t)}{2R^2} z^2.$$

Здесь и далее полагаем для простоты, что $c = \hbar = 1;\; e > 0$.

Нетрудно убедиться в том, что операторы A и B вида

$$A = \frac{i}{\sqrt{2m}}(\sigma P_x + \epsilon P_y - m\epsilon y); \tag{4}$$

$$B = \frac{i}{\sqrt{2m}}(\mu P_x + s P_y - imx - m\dot{s} y) \tag{5}$$

являются интегралами движения, т. е. коммутируют с оператором $H_{x,y} - i\partial/\partial t$. В выражениях (4), (5)

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \omega_0(\tau)\epsilon(\tau) d\tau;$$

$$s = \frac{1}{2}(\sigma\epsilon^* - \sigma^*\epsilon);\;\; \mu = 1 + \int_{t_0}^{t}(\omega_0(\tau)s(\tau) + i)d\tau, \tag{6}$$

а $\epsilon(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{\epsilon}(t) + \frac{\Omega^2(t)}{4}\epsilon = 0; \quad \frac{\Omega^2(t)}{4} = \omega_0^2(t) + \frac{eU(t)}{mR^2}, \tag{7}$$

для которого выполняется условие

$$\epsilon(t) = |\epsilon(t)|\; \exp\left[i\int_{t_0}^{t} |\epsilon(\tau)|^{-2} d\tau\right]. \tag{8}$$

Операторы A и B удовлетворяют коммутационным соотношениям бозонных операторов рождения и уничтожения:

$$[A,\, A^+] = [B,\, B^+] = 1, \quad [A,\, B] = [A,\, B^+] = 0. \tag{9}$$

Приведем выражение дяя когерентных состояний заряда в полях (1), (2), являющихся собственными функциями операторов A и B:

$$A|\alpha,\, \beta;\, t\rangle = \alpha|\alpha,\, \beta;\, t\rangle;\;\; B|\alpha,\, \beta;\, t\rangle = \beta|\alpha,\, \beta;\, t\rangle;$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,\, \beta;\, t\rangle = H_{x,y}|\alpha,\, \beta;\, t\rangle;$$

$$\pi^{-2}\int d^2\alpha\; d^2\beta\; |\alpha,\, \beta;\, t\rangle\langle\alpha,\, \beta;\, t| = 1;\;\; d^2\alpha = d(\mathrm{Re}\alpha)d(\mathrm{Im}\alpha);$$

$$\begin{aligned} |\alpha,\, \beta;\, t\rangle = [\pi(\epsilon\mu - s\sigma)]^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \\ +(\epsilon\mu - s\sigma)^{-1}\Big[-\frac{m}{2}\epsilon x^2 + i\frac{m}{2}(\dot{\epsilon}\mu - \dot{s}\sigma)y^2 + m\sigma xy + \\ +\sqrt{2m}(\mu\alpha - \sigma\beta)y + \sqrt{2m}(\epsilon\beta - s\alpha)x - \frac{1}{2}(2\epsilon - \epsilon\mu + s\sigma)\beta^2 - \\ -\frac{1}{2}(2\epsilon^* - \epsilon^*\mu^* + s^*\sigma^*)\alpha^2 + 2s\alpha\beta\Big] + \Phi(t)\Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

где α и β — произвольные комплексные числа.

Рассчитаем теперь излучение заряда в полях (1), (2). Следуя общей схеме расчета излучения методом когерентных состояний [4], [5], выразил гамильтониан взаимодействия заряда с полем излучения через интегралы движения (4), (5). В дипольном приближении гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{int} = -\frac{e}{\sqrt{2m}} \sum_{\lambda,\,\rho} \sqrt{\frac{2\pi}{V\omega_\lambda}} (c_{\lambda,\,\rho} + c^+_{\lambda,\,\rho})(\sigma_1 A + \sigma_1^* A^+ + \sigma_2 B + \sigma_2^* B^+), \tag{11}$$

где $c_{\lambda,\,\rho}$ $(c^+_{\lambda,\,\rho})$ — операторы рождения (уничтожения) фотона с частотой ω_λ, волновым вектором $\vec{k}_\lambda$ и вектором поляризации $\vec{e}_{\lambda,\rho}$; V — нормировочный объем, а переменные σ_i, $i = 1,\,2$, определяются как

$$\begin{gathered} \sigma_1(t) = \omega_0 \epsilon^* (\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_x + \dot{\epsilon}^* (\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_y; \\ \sigma_2(t) = (\omega_0 s^* - i)(\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_x + \dot{s}^* (\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_y; \end{gathered} \tag{12}$$

при этом полагаем, что $\vec{e}_{\lambda,\,\rho} = \{(\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_x,\, (\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_y,\, 0\}$.

Предположим, что электромагнитное поле было постоянно в далеком прошлом и становится постоянным в будущем, т. е. $\lim\limits_{t\to-\infty} H(t) = H_{in}$; $\lim\limits_{t\to+\infty} H(t) = H_f$. При этих условиях существуют начальные и конечные стационарные состояния $|n_1,\, n_2;\, t\to-\infty\rangle$; $|m_1,\, m_2;\, f\rangle$ и начальные и конечные когерентные состояния $|\alpha_1,\, \beta_1;\, t\to-\infty\rangle$; $|\alpha_2,\, \beta_2;\, f\rangle$. Рассмотрим переходы с излучением фотона между этими состояниями.

Мощность спонтанного дипольного излучения фотонов с частотой, лежащей в интервале между ω_λ и $\omega_\lambda + d\omega_\lambda$, с вектором поляризации $\vec{e}_{\lambda,\,\rho}$; $(\vec{e}_{\lambda,\,\rho})_z = 0$ вблизи направления $\vec{n}_\lambda = \dfrac{\vec{k}_\lambda}{\omega_\lambda}$; $\vec{k}_\lambda = \{k_{\lambda x},\, k_{\lambda y},\, 0\}$ при переходах системы между когерентными состояниями $|\alpha_1,\, \beta_1;\, t\rangle \to$ $\to |\alpha_2,\, \beta_2;\, f\rangle$ равна [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{n}_\lambda,\, \omega_\lambda,\, \vec{e}_{\lambda,\,\rho}) = \frac{e^2\omega_\lambda^2}{4\pi^2} \int d^2\alpha_1 d^2\beta_1 d^2\alpha_2 d^2\beta_2\; P_{in}(\alpha_1,\, \beta_1) P_f(\alpha_2,\, \beta_2) \times \\ \times \int d\tau\; e^{-i\omega_\lambda \tau} W\left(t - \frac{\tau}{2}\right) W^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} W = \left[\sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\beta_1 + \sigma_1^*\left(\frac{\alpha_1^*}{2} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) + \sigma_2^*\left(\frac{\beta_1^*}{2} + \frac{\partial}{\partial\beta_1}\right)\right] \times \\ \times \langle\alpha_2,\, \beta_2;\, f|\alpha_1,\, \beta_1;\, t\to-\infty\rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

В выражении (13) через P-представление Глаубера [2] записаны матрицы плотности

$$\begin{gathered} \rho_{in,\,f} = \int d^2\alpha\; d^2\beta\; P_{in,\,f}(\alpha,\, \beta)\; |\alpha,\, \beta;\, in,\, f\rangle\langle\alpha,\, \beta;\, in,\, f|; \\ |\alpha,\, \beta;\, in\rangle \equiv \lim_{t\to-\infty} |\alpha,\, \beta;\, t\rangle, \end{gathered} \tag{15}$$

дающие усреднение по начальным состояниям и суммирование по конечным.

Выберем в матрицах плотности (15) P-функции в виде

$$P_{in} = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)\delta^{(2)}(\beta - \beta_0); \quad P_f = \pi^{-2}. \tag{16}$$

Полагая, что вектор $\{\alpha_0,\, \beta_0\}$ задает начальную точку классической траектории в фазовом пространстве частицы, в случае $|\alpha_0| \gg 1$, $|\beta_0| \gg 1$ получим классическое выражение для мощности излучения.

Аналогом стационарных состоявши гамильтониана $H_{x,y}$ в случае переменных полей являются собственные функции операторов A^+A и B^+B, т. н. фоковские состояния [3]:

$$\begin{gathered} A^+A|n_1,\, n_2;\, t\rangle = n_1|n_1,\, n_2;\, t\rangle; \\ B^+B|n_1,\, n_2;\, t\rangle = n_2|n_1,\, n_2;\, t\rangle; \\ i\frac{\partial}{\partial t}|n_1,\, n_2;\, t\rangle = H_{x,y}|n_1,\, n_2;\, t\rangle; \\ \langle m_1,\, m_2;\, t|n_1,\, n_2;\, t\rangle = \delta_{n_1\,m_1}\delta_{n_2\,m_2}; \\ m_{1,\,2},\, n_{1,\,2} = 0,\, 1,\, 2, \ldots \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку амплитуды $\langle\alpha_2,\, \beta_2;\, f|\alpha_1,\, \beta_1;\, t\rangle$ являются производящими для амплитуд переходов $\langle m_1,\, m_2;\, t|n_1,\, n_2;\, t\rangle$, которые выражаются через полиномы Эрмита от четырех переменных [13], то нетрудно рассчитать вероятности переходов $|n_1,\, n_2;\, t\rangle \to |m_1,\, m_2;\, f\rangle$ с излучением фотона.

Чтобы рассмотреть переходы с излучением фотона в недипольном случае, когда гамильтониан взаимодействия заряда с полем излучения (11) содержит множители $\exp(\pm i\vec{k}_\lambda\vec{r})$, нужно представить [4], [5] операторы $\exp(\pm i\vec{k}_\lambda\vec{r})$ как вейлевские операторы сдвига [2]:

$$\exp[i(k_{\lambda\,x}x + k_{\lambda\,y}y)] = D_1(\Delta_1)D_2(\Delta_2)\exp[\Psi_1(t)], \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} D_1(\Delta_1) = \exp(\Delta_1 A^+ - \Delta_1^* A); \;\; D_2(\Delta_2) = \exp(\Delta_2 B^+ - \Delta_2^* B); \\ \Delta_1 = -\frac{i}{\sqrt{2m}}(\sigma k_{\lambda\,x} + \epsilon k_{\lambda\,y}); \;\; \Delta_2 = -\frac{i}{\sqrt{2m}}(\mu k_{\lambda\,x} + s k_{\lambda\,y}); \\ \Psi_1(t) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Полагаем, что $k_{\lambda\,z} = 0$.

Выражение для мощности излучения в этом случае легко получить, если учесть действие вейлевских операторов сдвига на когерентные состояния [2]:

$$\begin{gathered} D_1(\Delta_1)D_2(\Delta_2)|\alpha,\, \beta;\, t\rangle = |\alpha + \Delta_1,\, \beta + \Delta_2;\, t\rangle \exp\Psi_2; \\ \Psi_2 = i\mathrm{Im}(\Delta_1\alpha^* + \Delta_2\beta^*). \end{gathered} \tag{20}$$

Рассмотрим частный случай переменных полей (1), (2), когда магнитное поле отсутствует, а электрическое поле является периодической функцией времени с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. В этом случае следует воспользоваться понятием квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций [14], [15] (см. также [7]). Полагаем также, что вихревым магнитным полем можно пренебречь.

Нетрудно видеть, что собственные функции оператора A^+A являются квазиэнергетическими состояниями, т. е. удовлетворяют соотношению

$$|n_1,\, t + T\rangle = \exp\left[-i\Omega_1 T\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\right]|n_1,\, t\rangle; \tag{21}$$

$$\mathcal{E}_{n_1} = i\Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right), \tag{22}$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{T}\int_0^T |\epsilon(\tau)|^{-2} d\tau, \tag{23}$$

поскольку для интеграла движения A справедливо равенство

$$A(T) = e^{i\Omega_1 T}A(0). \tag{24}$$

Наиболее интересным в случае периодических полей является рассмотрение эффекта индуцированного излучения (см. [6]).

Для мощности суммарного эффекта одновременно идущих дипольных процессов индуцированного излучения и индуцированного поглощения получим

$$\mathcal{P}_{sum}(\vec{n}_\lambda,\, |\Omega_1 - \omega l|,\, \vec{e}_{\lambda,\rho}) = -\frac{2\pi^2 e^2}{m}\,\mathcal{U}_p(\vec{n}_\lambda,\, |\Omega_1 - \omega l|)\,\frac{|\eta(l)|^2}{\Omega_1 - \omega l};$$
$$\Omega_1 \neq \nu\frac{\omega}{2};\;\; \nu = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots;\;\; \vec{e}_{\lambda,\rho} = \{0,\, (\vec{e}_{\lambda,\rho})_y,\, 0\}, \tag{25}$$

где $\mathcal{U}_\rho(\vec{n}_\lambda,\, \omega_\lambda)$ — интенсивность внешней электромагнитной волны с частотой, а коэффициенты являются коэффициентами разложения в ряд Фурье следующей периодической функции:

$$\eta(t) = \eta(t+T); \quad \eta(t) = \sigma_1(t)e^{i\Omega_1 t}. \tag{26}$$

Рассмотрим частный случай, когда потенциал электрического поля имеет вид

$$U(t) = U_0 + U_1\cos\omega t; \quad U_0,\, U_1 = const; \tag{27}$$

при этом полагаем, что $\dfrac{U_1}{U_0} \ll 1$, а $\omega = 2\Omega_2(1+\varepsilon)$, где $\Omega_2^2 = \dfrac{eU_0}{mR^2}$; $\varepsilon \to 0$. Тогда устойчивые решения уравнения (7) можно записать в виде [16], [17]

$$\epsilon(t+T) = e^{i\Omega_1 T}\epsilon(t), \tag{28}$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 - \frac{eU_0}{4mR^2}\left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2}. \tag{29}$$

Из соотношения (25) видно, что индуцированное излучение в системе возможно на частотах соответствующих сателлитов [6]. Таким образом, рассмотренную систему можно использовать как в качестве генератора, так и в качестве усилителя электромагнитных колебаний.

Список литературы

[1] Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Изв. ВУЗов, радиофизика, 10, с. 1414, 1967.
[2] Glauber R.J. Phys. Rev., 131, p. 2766, 1963; Phys. Rev. Lett., 10, p. 84, 1963.
[3] Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
[4] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. Phys. Lett., 50 A, p. 23, 1974.
[5] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. Int. J. Theor. Phys., 16, p. 503, 1977.
[6] Иванова Е.В., Малкин И.А., Манько В.И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 8, с. 3, 1977.
[7] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. J. Phys., 10A, p. 75, 1977.
[8] Иванова Е.В. В сб. Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. I, с. 358.
[9] Dodonov V.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. Physika, 59, p. 241, 1972.
[10] Дерюгин И.А., Воронцов В.И. В сб. Квантовая электроника, 5. К.: Наукова думка, 1971, с. 281.
[11] Маусунбаев С.С., Павленко Ю.Г., Воронцов В.И. Укр. физ. журнал, 20, с. 1391, 1975.
[12] Vorontzov V.I., Mausunbayev S.S. Phys. Lett., 53A, p. 435, 1975.
[13] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967.
[14] Зельдович Я.Б. ЖЭТФ, 51, с. 1492, 1966.
[15] Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, с. 776, 1964.
[16] Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1953.
[17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1966.

Иванова Е. В., к. ф.-м. н., Московский авиационный институт (государственный технический университет), Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

E-mail: k803@mai.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.
Московский Авиационный Институт, Москва, Россия

Предлагаются способы, улучшающие вычислительный процесс интегрирования краевой задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными краевыми условиями.

1. Введение

Одним из способов решения краевой задачи является сведение краевой задачи к эквивалентному операторному уравнению и дальнейшее решение этого уравнения. Различные способы сведения к операторному уравнению и решения полученного уравнения можно найти в следующих монографиях: Р.Е.Беллман, Р.Е.Калаба [1], Х.Б.Келлер [2], А.М.Самойленко, Н.И.Ронто [3], М.А.Красносельский и др. [4].

2. Краевая задача

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad R(x(a), x(b)) = 0. \tag{1}$$

Здесь $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ гладкие функции. Предполагаем, что решение задачи (1) существует и единственно.

Идея метода пристрелки заключается в сведении краевой задачи (1) к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и системе трансцендентных уравнений. Построим схему процесса.

Выберем точку $t_* \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_*} = p \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Пусть решением задачи (2) будет функция

$$x(t, p), \quad a \leq t \leq b. \tag{3}$$

Понятно, что функция (3) должна обращать в тождество граничные условия, т.е.

$$\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0. \tag{4}$$

Следовательно, необходимо искать решение уравнения

$$\Phi(p) = 0. \tag{5}$$

2.1. **Обычный метод пристрелки.** К уравнению (5) применяется метод Ньютона. Схема процесса

$$\begin{cases} p^{(k+1)} = p^{(k)} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}(p^{(k)})\right]^{-1} \Phi(p^{(k)}), \\ p^{(0)} = p_0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь p_0 некоторое начальное приближение. Недостаток данного подхода в том, что процесс (6) чувствителен к выбору начального приближения, и не для всех значений p_0 процесс будет сходящимся.

2.2. **Продолжение решения по параметру.** Ослабить указанную проблему возможно используя подход Лаэя (M.Lahaye). Введем в уравнение скалярный параметр μ следующим образом

$$\Psi_j(p,\mu) = \Phi_j(p) - (1-\mu)\Phi_j(p_0) = 0, \quad j = 1,2,...,n, \quad \mu \in [0,1]. \tag{7}$$

Очевидно, что при $\mu = 0$, $p = p_0$, а при $\mu = 1$, $\Phi(p) = 0$, т.е. p удовлетворяет исходному уравнению (5). Таким образом, следует ожидать, что при изменении параметра μ от 0 до 1 переменная p будет меняться от произвольного начального значения p_0 до решения системы уравнений (5).

Произведем разбиение отрезка, на котором изменяется μ

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_m = 1. \tag{8}$$

Тогда схема процесса будет иметь вид

$$\begin{cases} p_{(i)}^{(k+1)} = p_{(i)}^{(k)} - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial p}(p_{(i)}^{(k)},\mu_i)\right]^{-1}\Psi(p_{(i)}^{(k)},\mu_i), \\ p_{(i)}^{(0)} = p_{(i-1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь верхний индекс отвечает итерации метода Ньютона, нижний – шагу по μ. Недостатком данного подхода является то, что кривая $p = p(\mu)$ может содержать предельные точки, т.е. особые точки в которых якобиан системы (7) равен нулю, а матрица Якоби вырождена.

2.3. **Продолжение решения по наилучшему параметру.** Для преодоления указанной трудности предлагается применить наилучшую параметризацию [5].

Введем в уравнения (7) наилучший параметр ν ($0 \le \nu \le N$) [6]. Произведем разбиение

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_l = N. \tag{10}$$

Добавим еще одно уравнение к системе (7), тогда при продолжении на i-м шаге по параметру ν имеем

$$\begin{cases} \Psi_j(p,\mu) = \Phi_j(p) - (1-\mu)\Phi_j(p_0) = 0, \quad j = 1,2,...,n, \\ \Psi_{n+1}(p,\mu) = \sum\limits_{j=1}^{n}(p_j - p_{j(i)})^2 + (\mu-\mu_i)^2 - \Delta\nu_i^2 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\Delta\nu_i = \nu_i - \nu_{i-1}$, $p_{j(i)} = p_j(\mu_i)$, $j = 1,2,...,n$, $i = 1,2,...,l$.

Тогда схема процесса

$$\begin{pmatrix} p_{1(i)}^{(k+1)} \\ \ldots \\ p_{n(i)}^{(k+1)} \\ \mu_{(i)}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1(i)}^{(k)} \\ \ldots \\ p_{n(i)}^{(k)} \\ \mu_{(i)}^{(k)} \end{pmatrix} - J^{-1}(p_{(i)}^{(k)},\mu_{(i)}) \begin{pmatrix} \Psi_1(p_{(i)}^{(k)},\mu_{(i)}) \\ \ldots \\ \Psi_n(p_{(i)}^{(k)},\mu_{(i)}) \\ \Psi_{n+1}(p_{(i)}^{(k)},\mu_{(i)}) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Здесь верхний индекс отвечает итерации метода Ньютона, нижний – шагу по ν.

Начальные приближения выбираются следующим образом [7]

$$\begin{cases} p_{(i)}^{(0)} = p_{(i-1)} + (1 + \frac{\Delta\nu_i}{\Delta\nu_{i-1}})(p_{(i)} - p_{(i-1)}), \\ \mu_{(i)}^{(0)} = \mu_{(i-1)} + (1 + \frac{\Delta\nu_i}{\Delta\nu_{i-1}})(\mu_{(i)} - \mu_{(i-1)}). \end{cases} \tag{13}$$

2.4. **Пример.** Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \ddot{x} = 1, \\ x(0) = 0, \quad \Phi(\dot{x}(1) - 1) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\Phi(p)$ будет иметь вид

$$\Phi(p) = \begin{cases} -p + 2, & p \in (-\infty, 1], \\ 1, & p \in [1, 2], \\ -p + 3, & p \in [2, +\infty). \end{cases} \tag{15}$$

Начальное приближение $\dot{x}(0) = p_0 = 0$.

Очевидно, что на отрезке кривой $\Phi = \Phi(p)$, который параллелен оси p, матрица Якоби первых двух методов будет вырожденной, и, следовательно, итерационные схемы (9),(12) не приводят к решению. Схема, использующая наилучший параметр ν, позволяет получить достоверное решение задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00071).

Список литературы

[1] *R.E.Bellman, R.E.Kalaba* Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. New York: American Elsevier Publishing Company, 1965.

[2] *H.B.Keller* Numerical methods for two-point boundary value problems. Waltham: Ginn-Blaisdell, 1968.

[3] *А.М.Самойленко, Н.И. Ронто* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наукова думка, 1986

[4] *А.М.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б.Рутицкий, В.Я. Стеценко* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

[5] *В.И.Шалашилин, Е.Б.Кузнецов* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[6] Е.Б.Кузнецов Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом.// Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 6. с. 746-748.

[7] Е.Б.Кузнецов Наилучшая параметризация при построении кривых.// Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. с. 1540-1551.

Кузнецов Евгений Борисович, Московский Авиационный Институт, Россия, 125993,А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4., Москва

E-mail: `kuznetsov@mai.ru`

Красников Сергей Дмитриевич, Московский Авиационный Институт, Россия, 125993, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4., Москва

E-mail: `sergeykr@mail.ru`

О ДВИЖЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В.Г. Лежнев, А.Н. Марковский
Кубанский Государственный Университет
Краснодар, Россия

В статье рассматривается представление функции тока плоского стационарного течения несжимаемой жидкости в виде логарифмического потенциала. Указан алгоритм определения плотности потенциала - плотности вихрей в области течения. Численно получены траектории движения точечных вихрей в круге.

This article considers the presentation of incompressible liquid two-dimensional steady flow stream function in the form of logarithmic potential. The algorithm of potential density — the density of swirls in flow area — determination is adduced in it. The trajectory of separate swirls movement in circle is calculated in this article.

В статті розглядуєця представлення функції струму плоскої стаціонарної течі в обліку логаріфмичного потенціалу. В казан алгорітм нахожденння плотності потенціалу – плотності віхрів в області течії. Чісленно получені траекторії точечніх віхрів в крузі.

Задачи о движении точечных вихрей в плоском течении идеальной жидкости представляют большой интерес, многие вопросы остаются актуальными и сегодня [1], [2], например, вопрос об устойчивости системы одинаковых вихрей в вершинах правильного n-угольника [5], [6]. В данной работе рассматривается движение знакопеременных вихрей из вершин четного правильного многоугольника.

Обычно такие задачи ставятся в терминах комплексной скорости. В данной работе рассматриваемая задача исследуется методами теории потенциала. Многие задачи плоскопараллельных течений естественно формулировать как обратные задачи логарифмического потенциала, зачастую могут быть получены простые аппроксимирующие алгоритмы [4].

1. Рассмотрим движение точечных вихрей несжимаемой потенциальной жидкости в ограниченной области Q с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$, которая является линией тока. Пусть z^k — положения вихрей в Q, Γ_k — их интенсивности, равные по модулю и знакочередующиеся, $k = 1, ..., N = 2K$. Предполагается, что поле скоростей течения $\overline{w}(x,t) = \{u(x,t), v(x,t)\}$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяет в области Q следующим условиям: a) $div\ \overline{w} = 0$, $rot\ \overline{w} = 0$ при $x \neq z^k$, b) граница S — линия тока.

Требуется определить векторное поле $\overline{w}(x) = \{u(x), v(x)\}$ в каждый момент времени, а также траектории вихрей.

Из условия $div\ \overline{w} = 0$ следует, что существует функция тока Ψ. Будем определять ее для каждого момента времени, т.е. для каждого положения z^k вихрей, в виде

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k ln|z^k - x| + \int_S g(y)E(x-y)ds_y + C, \quad x \in \overline{Q}, \tag{1}$$

где плотность $g(y)$ требуется определить так, чтобы выполнялось условие непротекания b), т.е. условие

$$\Psi(x) \equiv const, \quad x \in S. \tag{2}$$

Теорема. Если потенциал Робена для Q не равен нулю, то функция $g(y)$ в представлении (1) такая, что выполняется условие (2), существует и единственна.

Доказательство. Так как $\sum\limits_{k=1}^{N}\Gamma_k = 0$, то

$$-\frac{\partial}{\partial n}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k ln|z^k - x|$$

ортогональна единице на границе S. Существует решение задачи Неймана в Q с этой граничной функцией, и это решение представляется потенциалом простого слоя. Обозначим через $g_0(y)$ плотность потенциала в этом решении задачи Неймана, следовательно, для выполнения условия b) нужно в представлении (1) полагать $g(y) = g_0(y)$, при этом $\Psi(x) = C,\ \ x \in S$.

Постоянная C в (1) далее может быть выбрана любой.

Для доказательства единственности предположим противное. Обозначим Ψ_1 другую функцию тока вида (1) с плотностью $g_1(y)$, и пусть постоянные слагаемые в обоих представлениях равны. Можно полагать также, что $\Psi_1 = \Psi$ на S. Тогда

$$\Psi_1(x) - \Psi(x) = \int\limits_S (g_1(y) - g(y))E(x-y)ds_y, \quad x \in \overline{Q},$$

интеграл равен нулю на S, и разность $g_1(y) - g(y)$ также равна нулю, иначе она была бы плотностью нулевого потенциала Робена, что невозможно по условию. Единственность, а вместе с тем и теорема, доказана.

Пусть последовательность $x^m, m = 1, ..., M$, принадлежит внешней к S области $Q^+ = R^2 \setminus \overline{Q}$, отделена от границы и удовлетворяет условию единственности гармонических функций [4], обозначим

$$\alpha_m^+(y) = E(x^m - y), \ \ y \in S.$$

Аппроксимацию $g^M(y)$ искомой плотности $g(y)$ будем искать в виде

$$g^M(y) = \sum_{m=1}^{M} c_m \alpha_m^+(y).$$

Лемма 1. Система функций $\alpha_m^+(y), m = 1, ..., M$, линейно независима и полна в $L_2(S)$.

Аппроксимация $\Psi^M(x)$ функции тока $\Psi(x)$ имеет вид:

$$\Psi^M(x) = \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k ln|z^k - x| + \sum_{m=1}^{M} c_m\sigma_m(y) + C,$$

$$\sigma_m(y) = \int\limits_S \alpha_m^+(y)E(x-y)ds_y.$$

Обозначим через R_0 значение потенциала Робена в области Q [3], через $L_2^{\varphi}(S)$ — подпространство, ортогональное плотности потенциала Робена [4].

Лемма 2. Если $R_0 \neq 0$, то система функций $\sigma_m(x), m = 1, ..., M$, линейно независима и замкнута в $L_2(S)$; если $R_0 = 0$, то эта система функций принадлежит подпространству $L_2^{\varphi}(S)$ и замкнута в $L_2^{\varphi}(S)$.

Доказательство. 1) Пусть $R_0 \neq 0, f(x) \in L_2(S)$ и $(f, \sigma_m) = 0,\ m = 1, 2, ...$, т.е.

$$\int\limits_S f(x)\left[\int\limits_S \alpha_m^+(y) ln|x-y| ds_y\right] ds_x = \int\limits_S \alpha_m^+(y)g(y)ds_y = 0,$$

где

$$g(y) =: \int\limits_S f(x) ln|x-y| ds_x.$$

По лемме 1 получаем, что $g(y)=0$ на S, а также при $y \in Q$, так как $g(y)$ гармоническая в Q и непрерывна в $\overline{Q}$.

Отсюда следует, что $f(x)$ ортогональна функциям $\alpha_m^-(x)$, построенным по некоторой базисной последовательности $x^m \in Q$ [4].

Разложим $f(x)$ на ортогональные слагаемые

$$f(x) = c\varphi^*(x) + h(x), \quad h(x) \in L_2^{\varphi}(S).$$

Так как $f(x)$ и $\varphi^*(x)$ ортогональны функциям $\delta_m(x) = E(x^{m+1}-x) - E(x^m - x)$, $x \in S$ то и $h(x)$ ортогональна всем $\delta_m(x)$ и, следовательно, $h(x)=0$.

Мы получаем, что $f(x) = c\varphi^*(x)$, и имеют место равенства

$$0 = c(\varphi^*, \alpha_m^-) = \pi c R_0.$$

Следовательно, $c=0$ и $f(x)=0$. Замкнутость доказана.

Рассмотрим линейную независимость функции $\sigma_m(x)$, если потенциал Робена не равен нулю, $R_0 \neq 0$. Предположим, что $\sigma_m(x)$ линейно зависимы, т.е. существует линейная комбинация, тождественно равная нулю на S,

$$\sum c_{k_n}\sigma_{k_n}(x) = \int\limits_S \sum c_{k_n}\alpha_{k_n}^+(y)E(x-y)ds_y, \quad x \in S.$$

Эта сумма является гармонической в Q, следовательно, равна нулю в Q, и, полагая $x = x_m \in Q$, получаем, что функция

$$F(x) = \sum c_{k_n}\alpha_{k_n}^+(x), \quad x \in S,$$

ортогональна всем $\delta_m(x)$. Функция $F(x)$ ортогональна подпространству $L_2^{\varphi}(S)$, т.е. $F(x) = c\varphi^*(x)$. Мы получаем

$$\int\limits_S F(y)E(x-y)ds_y = cR_0,$$

и так как этот интеграл равен нулю, то $c=0$ и $F(x)=0$, $x \in S$. Последнее равенство обозначает линейную зависимость функций $\alpha_m^+(x)$, что невозможно, и мы получаем противоречие предположению о линейной зависимости. Т.е. линейная независимость функций $\sigma_m(x)$ доказана, доказательство первой части завершено.

2) Пусть теперь $R_0 = 0$, покажем сначала, что $\sigma_m(x) \in L_2^{\varphi}(S)$. Мы имеем

$$(\varphi^*, \sigma_m) = \int\limits_S \varphi^*(x) \int\limits_S \alpha_m^+(y) ln|x-y| ds_y ds_x =$$

$$= \int\limits_S \alpha_m^+(y) \left[\int\limits_S \varphi^*(x) ln|x-y| ds_x \right] ds_y = -\pi R_0 \int\limits_S \alpha_m^+(y) ds_y,$$

следовательно, $(\varphi^*, \sigma_m) = 0$, т.е. $\sigma_m(x)$ принадлежат $L_2^{\varphi}(S)$.

Докажем замкнутость в $L_2^{\varphi}(S)$ системы функций $\sigma_m(x)$. Пусть

$$f(x) \in L_2^{\varphi}(S), \quad (f, \sigma_m) = 0.$$

Тогда аналогично предыдущей части

$$\int\limits_S f(y) \left[\int\limits_S \alpha_m^+(y) ln|x-y| ds_y \right] ds_x = \int\limits_S \alpha_m^+(y) g(y) ds_y = 0,$$

где

$$g(y) =: \int\limits_S f(x) ln|x-y| ds_x, \quad y \in Q.$$

Функция $g(y)$ равна нулю на S по лемме 1 и, следовательно, в Q. Т.е. $f(x)$ ортогональна всем $\delta_m(x)$, и $f(x) = 0$ [4]. Лемма доказана.

Отметим, что при доказательстве мы использовали полноту в $L_2^{\varphi}(S)$ системы функций $\delta_m(x)$. Отметим также, что $R_0 = 0$, если S — единичная окружность.

2. Рассмотрим задачу о движении N точечных вихрей в круге $Q = \{x : |x| < r\},\ r = 1.1$. Будем полагать, что интенсивности Γ_k знакочередующиеся и равные по модулю.

Рассмотрим функцию $F(c)$ переменных $c = (c_1, c_2, ..., c_M)$:

$$F(c) = \left\| \Psi|_S - \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k ln|z^k - x| + \sum_{m=1}^{M} c_m \sigma_m(x) \right\|^2,$$

где $\| \cdot \|$ норма в $L_2(S)$, и рассмотрим вариационную задачу W.

Задача W: найти $\mu = \inf F(c)$ и минимизирующие коэффициенты.

Необходимое условие экстремума приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$\frac{\partial F(c)}{\partial x_i} = 0, \ \ i = 1, ..., M.$$

Решение задачи W существует и единственно, так как матрица системы есть матрица Грама для линейно независимой системы функций.

Поле скоростей, индуцируемое вихрями внутри области Q, определяется при $x \neq z^k$ следующим образом:

$$\overline{w}(x) = \{\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\} =: \nabla_c \Psi,$$

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k ln|z^k - x| + \sum_{m=1}^{M} c_m \sigma_m(x),$$

(для $x = z^k$ используется гипотеза о том, что вихрь сам себя не движет [2]).

Для положения $z^k(t+\Delta t)$ k-го вихря в момент времени $t + \Delta t$ используются следующие приближенные равенства:

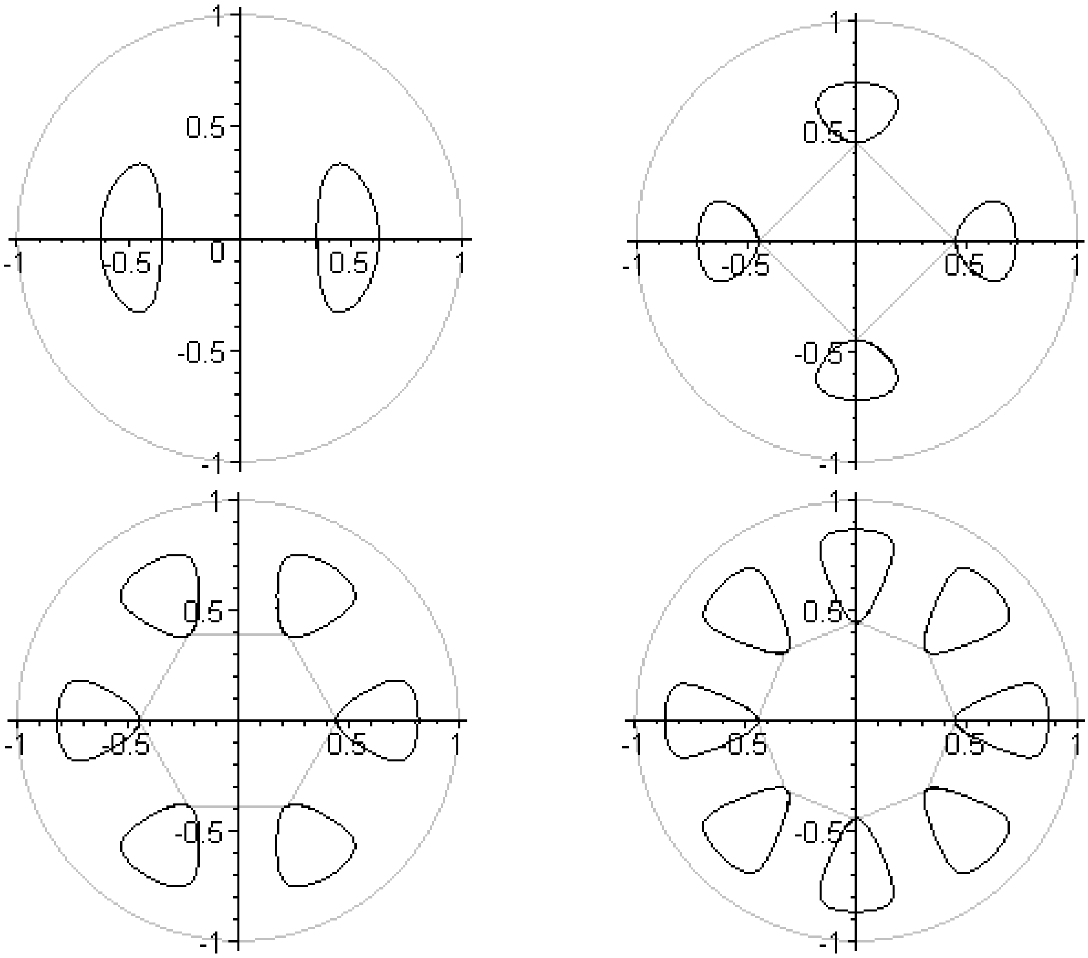
$$z^k(t + \Delta t) = z^k(t) + \frac{\overline{w}_i(t)}{|\overline{w}_i(t)|}\Delta t, \ \ k = 1, ..., N,$$

$$\overline{w}_i(t) = \nabla_c \{ \sum_{k=1, k \neq i}^{N} \Gamma_k ln|z^k(t) - z^i(t)| + \sum_{m=1}^{M} c_m \sigma_m(z^i(t)) \}.$$

Далее представлены хореографии вихрей лежащих в вершинах правильных N-угольников с радиусом r_0=0.45. Вихри имеют одинаковые по модулю интенсивности с чередующимися знаками.

Расчет также проводился для двух вихрей во всем пространстве. Полученные результаты совпадают с известными — вихри движутся по окружности, если их интенсивности равны, и по параллельным прямым, если интенсивности равны по модулю и противоположны по знаку.

Область Q может быть любой в этом алгоритме, в частности, неодносвязной, интенсивности вихрей Γ_k также можно выбирать любыми.



Работа выполнена при поддержке грантов № 03-01-96690 РФФИ-юг и Т02-14.0-2492 Минобразования РФ.

Список литературы

[1] Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000.

[2] А.В. Борисов, И.С. Мамаев, М.А. Соколовский. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. Москва-Ижевск, 2003.

[3] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

[4] Лежнев В.Г., Данилов Е.А. Задачи плоской гидродинамики. Краснодар. КубГУ, 2000.

[5] Куракин Л.Г. Об устойчивости правильного вихревого n-угольника // ДАН, 1994. Т.335, №6. С. 729-731.

[6] Куракин Л.Г., Юдович В.И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // ДАН, 2002. Т. 384. №4. С. 476-482.

Лежнев В.Г., профессор, факультет прикладной математики, Кубанский государственный университет, Россия, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская 149

E-mail: `lzhnv@mail.kubsu.ru`

В.Г. Лежнев, e-mail: lzhnv@mail.kubsu.ru А.Н. Марковский, e-mail: lelikss78@rambler.ru

1 Работа выполнена при поддержке грантов № 03-01-96690 РФФИ-юг и Т02-14.0-2492 Минобразования РФ.

ОДИН ПОДХОД К ОПИСАНИЮ В КОНЕЧНОЙ ФОРМЕ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ[1]

В. Л. Прядиев
Воронежский государственный университет
Воронеж, Россия

В настоящей работе приводится обоснование одного подхода к описанию в конечной форме решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечной и ограниченной пространственной сети. Подход этот основан на применении классической формулы Даламбера при сведении указанной задачи к набору классических задач о распространении граничных режимов для волнового же уравнения, но на отрезках. В результате возникает начальная задача для специального вида дифференциально-разностного уравнения, решение которой в конечной форме влечёт решение в конечной форме и начально-краевой задачи для волнового уравнения на пространственной сети.

In this work the justification of some approach to the description in the finite form of the solution of the initial boundary value problem for the wave equation on a finite and bounded spatial network is given. This approach is based on application of the classical D'Alambert formula at reduction of the mentioned problem to a set of classical problems about propagation of boundary regimes for the wave equation on segments. In result the initial problem for a special kind of difference-differential equation arise and the decision of this initial problem in the finite form imply the decision in the finite form of the initial boundary value problem for the wave equation on a spatial network.

1. Введение

Одно из направлений исследования волнового уравнения на пространственной сети связано с получением решения в конечной форме. Такая форма решения представляет несомненный интерес в задачах управления для волновых уравнений на сетях – в духе серии работ В. А. Ильина и его учеников[2], а также для создания эффективных схем численного решения таких уравнений.

В рамках этого направления определённые успехи достигнуты, прежде всего, в случае условий трансмиссии (в узлах пространственной сети) вида $\sum\limits_h u_h^+(a,t) = 0$, где суммирование выполняется по всем допустимым в узле a пространственным направлениям h, $u_h^+(a,t)$ есть правосторонняя производная решения $u(x,t)$ в точке $x = a$ по направлению h (см. [15, 11, 17, 7, 6, 16, 12, 14, 1]), а также в случае α-гладких (в смысле [10]) условий трансмиссии: $\sum\limits_h \alpha_h(a)u_h^+(a,t) = 0$, где $\alpha_h(a)$ – некоторые положительные числа [17, 7, 6]. Эти успехи были достигнуты благодаря найденным аналогам формулы Даламбера, однако аналоги эти приспособлены *только* для случая краевых условий 1-го и/или 2-го типов: $u(b,t)\cdot u_h^+(b,t) = 0$, где b – тупиковая точка пространственной сети. Это вполне объяснимо, т. к. в случае краевых условий 3-го типа даже для волнового уравнения на отрезке профили прямой и обратной волн в конечной форме были описаны совсем недавно [9, 8], да и то, лишь при другом краевом условии 1-го или 2-го типа. Результаты работ [9, 8] позволяют конструировать (см. там же) классы пространственных сетей, в сочетании с

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-0049, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект N E02-1.0-46), программы "Университеты России"(проект УР.04.01.047) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (N НШ-1643.2003.1)

[2]Серии, начинающейся, по-видимому, с [4] и [5]; подробную библиографию по этой тематике можно найти в [3].

классами краевых условий 1-го, 2-го и 3-го типов и классами условий трансмиссии вида $\sum\limits_h u_h^+(a,t) = k(a)u(a,t)$ (здесь $k(a)$ – некоторое неотрицательное число), – такие классы, для которых решение волнового уравнения удаётся описать в конечной форме. Но только лишь конструировать. В общем же случае условий трансмиссии последнего вида и краевых условий, например, 3-го типа проблема описания в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети изучена далеко ещё не в полной мере.

В настоящей работе даётся строгое обоснование одного подхода, позволившего продвинуться в исследовании этой проблемы (часть результатов пока только анонсирована – см., например, [13]).

2. Основной объект исследования

Пусть Γ – конечная ограниченная замкнутая и связная пространственная сеть. Будем рассматривать далее лишь случай, когда Γ есть связное объединение конечного числа *прямолинейных* отрезков из $\mathbf{R}^n$ – общности рассуждений это не уменьшит, а изложение – упростит. Для каждого $x \in \Gamma$ определим множество $D(x) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid \|h\| = 1$ и $(x+\varepsilon h) \in \Gamma$ для достаточно малых $\varepsilon > 0\}$. Для функции $v : \Gamma \to \mathbf{R}$ положим $v_h^+(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{v(x+\varepsilon h) - v(x)}{\varepsilon}$ (для $x \in \Gamma$ и $h \in D(x)$). Если $h \in D(x)$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено и $h \in D(x+\varepsilon h)$; поэтому можно определять $v_{hh}^{++}(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{v_h^+(x+\varepsilon h) - v_h^+(x)}{\varepsilon}$. Пусть $|D(x)| = 2$ (т. е. $D(x)$ двухэлементно) и $\sum\limits_{h\in D(x)} v_h^+(x) = 0$ (т. е. v гладка в точке x); если при этом производные $v_{hh}^{++}(x)$ совпадают для обоих $h \in D(x)$, то их общее значение будем обозначать через $v''(x)$, называя его второй производной функции v в точке x. Если $u : \Gamma \times T \to \mathbf{R}$ (T – связное подмножество $\mathbf{R}$) и при некотором $t \in T$ функция $u(\cdot, t)$ имеет вторую производную в точке x, то эту производную будем обозначать через $u_{xx}(x,t)$.

Выделим особо в рассмотрение (и зафиксируем) *конечное* подмножество $N(\Gamma)$ пространственной сети Γ, которое содержит в себе (возможно, строго содержит) множество *всех* точек x таких, что $|D(x)| \neq 2$. Положим $R(\Gamma) := \Gamma \setminus N(\Gamma)$.

Основной объект исследования в работе – это уравнение

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \tag{1}$$

которое предполагается выполненным при всех $x \in R(\Gamma)$ и всех $t > 0$. При этом будет предполагаться, что искомая функция $u(x,t)$ определена и непрерывна на $\Gamma \times [0; +\infty)$ по совокупности переменных, удовлетворяя условию

$$\sum_{h\in D(x)} u_h^+(x,t) = k(x)u(x,t), \qquad (x \in N(\Gamma),\ t \geq 0) \tag{2}$$

($k(x) \geq 0$ – заданные числа), а также, что для любого интервала $(a;b)$, являющегося компонентой связности множества $R(\Gamma)$, и для любого $t_0 > 0$ функция $v(y,t) := u\left(a + \dfrac{y}{\|b-a\|}(b-a), t\right)$ дважды непрерывно дифференцируема на замыкании $(0; \|b-a\|) \times (0; t_0)$. Система (1), (2) может рассматриваться, например, как модель малых колебаний растянутой сетки из струн с упруго закреплёнными узлами.

Для системы (1), (2) будем рассматривать начальные условия[3]

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0 \qquad (x \in \Gamma), \tag{3}$$

предполагая всегда, что φ дополнительно, помимо условия непрерывности на Γ (что следует из (3)) и условия трансмиссии, получаемого для неё из (2) (положением там $t = 0$),

[3]Случай, когда $u_t(x,0) \not\equiv 0$, сводится к (3) стандартно.

удовлетворяет ещё условиям (гарантирующим, как будет показано ниже, должную регулярность $u(x,t)$): 1) на $R(\Gamma)$ определена и непрерывна φ'', 2) для любой $x \in N(\Gamma)$ и любого $h \in D(x)$ выполнено $\varphi^{++}_{hh}(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varphi''(x+\varepsilon h)$, 3) для любой $x \in N(\Gamma)$ значение $\varphi^{++}_{hh}(x)$ не зависит от h ($\in D(x)$).

3. Дифференциально-разностное уравнение, сводящее задачу (1)–(3) к набору задач о распространении граничных режимов

Две различные точки a и b из $N(\Gamma)$ назовём смежными, если интервал $(a;b)$ является компонентой связности множества $R(\Gamma)$. Если a и b смежны, то будем писать: $a \leftrightarrow b$.

Лемма 1. *Пусть существует набор функций $\{\mu_a(t)\}_{a\in N(\Gamma)}$ такой, что для любой пары смежных точек a и b из $N(\Gamma)$ задача*

$$\begin{cases} v_{yy}(y,t) = v_{tt}(y,t) \qquad (0 < y < \|b-a\|,\ t > 0) \\ v(0,t) = \mu_a(t),\ v(\|b-a\|,t) = \mu_b(t) \qquad (t \ge 0) \\ v(y,0) = \varphi\left(a + \dfrac{y}{\|b-a\|}(b-a)\right),\ v_t(y,0) = 0 \qquad (0 \le y \le \|b-a\|) \end{cases} \tag{4}$$

имеет решение $v(y,t;a,b)$, причём для любой $a \in N(\Gamma)$

$$\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} v_y(0,t;a,b) = k(a)\mu_a(t) \qquad (t \ge 0). \tag{5}$$

Тогда функция $u(x,t)$, определяемая равенством $u(x,t) = v(\|x-a\|,t;a,b)$ при $x \in [a;b]$, где $a \leftrightarrow b$, является решением задачи (1)–(3).

Доказательство сводится к элементарной проверке.

Переформулируем теперь условия леммы 1, исключая из (5) $v_y(0,t;a,b)$ за счёт возможности выразить решение (4) через φ, μ_a и μ_b.

Пусть $a \leftrightarrow b$. Обозначим через $\varphi_{a,b}(y)$ нечётную и $2\|b-a\|$-периодическую функцию, определённую на $\mathbf{R} \setminus (\|b-a\|\mathbf{Z})$ ($\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел) и совпадающую с $\varphi\left(a + \dfrac{y}{\|b-a\|}(b-a)\right)$ на $(0;\|b-a\|)$. Производная $(\varphi_{a,b})'$ доопределяема по непрерывности в точках $\|b-a\|\mathbf{Z}$; это доопределение обозначим через $\psi_{a,b}$.

Лемма 2. *Пусть набор функций $\{\mu_a \in C^2[0;+\infty)\}_{a\in N(\Gamma)}$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{gathered} |D(a)|(\mu_a)'(t) + k(a)\mu_a(t) = \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \left\{ 2\cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-\|b-a\|}{2\|b-a\|}\right]} (\mu_b)'(t-(2k+1)\|b-a\|) - \right. \\ \left. -2\cdot \sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{2\|b-a\|}\right]} (\mu_a)'(t-2k\|b-a\|) + \psi_{a,b}(t) \right\} \qquad (t \ge 0, a \in N(\Gamma)) \end{gathered} \tag{6}$$

(квадратные скобки в верхнем пределе суммирования здесь и далее всегда обозначают взятие целой части числа) и начальным условиям

$$\mu_a(0) = \varphi(a) \qquad (a \in N(\Gamma)). \tag{7}$$

Тогда этот набор функций удовлетворяет условию леммы 1.

Доказательство. Пусть $\{\mu_a\}_{a\in N(\Gamma)}$ – набор функций, удовлетворяющий условиям леммы 2. Чтобы доказать, что для любой пары смежных точек a и b из $N(\Gamma)$ задача (4) имеет решение, необходимо и достаточно доказать, что для любой $a \in N(\Gamma)$ выполнены (помимо (7)) равенства:

$$(\mu_a)'(0) = 0, \tag{8}$$

$$(\mu_a)''(0) = (\varphi_{a,b})''(0) \qquad (b\,|\,b \leftrightarrow a). \tag{9}$$

Из (6), с учётом (7) и (2) (при $t = 0$), следует:

$$|D(a)|(\mu_a)'(0) = -k(a)\varphi(a) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \psi_{a,b}(0) = 0,$$

то есть выполнение (8); теперь, всё из того же (6), после дифференцирования обеих частей, получаем:

$$|D(a)|(\mu_a)''(0) = -k(a)(\mu_a)'(0) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} (\psi_{a,b})'(0) = \sum_{h\in D(a)} \varphi^{++}_{hh}(a) = |D(a)|\varphi^{++}_{\eta\eta}(a),$$

где η – любой вектор из $D(a)$, что и влечёт (9).

Далее, решение задачи (4) представимо в виде

$$v(y,t;a,b) = f_{a,b}(y+t) + f_{a,b}(y-t), \tag{10}$$

где $f_{a,b} = \dfrac{1}{2}\widetilde{\varphi}_{a,b} + \mathcal{F}_{\|b-a\|}\mu_a + \mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b$, где $\widetilde{\varphi}_{a,b}$ – функция, получаемая из $\varphi_{a,b}$ доопределением в точках $\|b-a\|\mathbf{Z}$ средним арифметическим своих предельных значений слева и справа,

$$(\mathcal{G}_l\mu)(y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{y-l}{2l}\right]} \mu(y-(2k+1)l), \quad y \geq 0 \wedge y \notin l(2\mathbf{N}-1) \\ \big((\mathcal{G}_l\mu)(y+) + (\mathcal{G}_l\mu)(y-)\big)/2, \quad y \in l(2\mathbf{N}-1) \\ -(\mathcal{G}_l\mu)(-y), \quad y < 0 \end{cases} \tag{11}$$

($\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел), $(\mathcal{F}_l\mu)(y) := -(\mathcal{G}_l\mu)(y-l)$, $y \in \mathbf{R}$. Поэтому левая часть равенства (5) может быть записана в виде (берём во внимание непрерывную дифференцируемость функций $\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a$ и $\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b$, а также чётность их производных и функции $\psi_{a,b}$):

$$\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \left\{\psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b)'(t) - (\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a)'(t - \|b-a\|) - (\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a)'(t + \|b-a\|)\right\},$$

то есть в виде (учитываем теперь, что при $\tau \geq -\|b-a\|$ выполнены равенства $(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b)'(\tau) = (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_b)')(\tau)$ и $(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a)'(\tau) = (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(\tau)$):

$$\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \left\{\psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_b)')(t) - (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t - \|b-a\|) - (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t + \|b-a\|)\right\}.$$

Заметим, что в силу (11)

$$\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t + \|b-a\|) = \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} (\mu_a)'(t) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{2\|b-a\|}\right]} (\mu_a)'(t - 2k\|b-a\|) =$$

$$= |D(a)|(\mu_a)'(t) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} (\mathcal{G}(\mu_a)')(t - \|b-a\|).$$

Таким образом, равенство (5) приобретает вид:

$$\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \left\{\psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_b)')(t) - 2(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t - \|b-a\|)\right\} - |D(a)|(\mu_a)'(t) =$$

$$= k(a)\mu_a(t) \quad (t \geq 0),$$

что, с учётом (11), совпадает с (6). Лемма 2 доказана.

4. Существование и единственность решения

Леммы 1 и 2 сводят (с помощью представления (10)) решение задачи (1)–(3) к решению задачи (6), (7). Уравнение (6) своеобразно: оно сочетает в себе черты дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа и черты дискретной системы с изменяющейся структурой (см. [2], глава 5).

Теорема. *Решение задачи* (6), (7) *существует, единственно и дважды непрерывно дифференцируемо на* $[0;+\infty)$.

Доказательство. Неединственность решения задачи (6), (7) повлекла бы, в силу лемм 1 и 2, неединственность решения задачи (1)–(3), что невозможно – см., например, [8][4].

Существование и заявленную гладкость решения задачи (6), (7) докажем методом шагов. Для этого рассмотрим множество $S := \left(\bigcup\limits_{a\in N(\Gamma)}\left(\bigcup\limits_{b\,|\,b\leftrightarrow a}\|b-a\|\mathbf{N}\right)\right)\bigcup\{0\}$. Его можно представить в виде: $S=\{s_0,\,s_1,\,s_2,\,\dots\}$, где $s_i<s_{i+1}$ $(i=0,\,1,\,2,\,\dots)$; отметим, что $s_0=0$. На каждом сегменте $[0;s_i]$ $(i\in\mathbf{N})$ определим набор $\{\mu_a^i:[0;s_i]\to\mathbf{R}\}_{a\in N(\Gamma)}$ следующим образом: 1) $\{\mu_a^1(t)\}_{a\in N(\Gamma)}$ есть решение задачи

$$|D(a)|(\mu_a^1)'(t)+k(a)\mu_a^1(t)=\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a}\psi_{a,b}(t)\qquad (a\in N(\Gamma),\ t\in[0;s_1]), \tag{12_1}$$

$$\mu_a^1(0)=\varphi(a)\qquad (a\in N(\Gamma)), \tag{13_1}$$

2) для $i\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$ $\mu_a^i(t)=\mu_a^{i-1}(t)$ при $t\in[0;s_{i-1}]$, а сужение набора $\{\mu_a^i(t)\}_{a\in N(\Gamma)}$ на $[s_{i-1};s_i]$ есть решение задачи

$$|D(a)|(\mu_a^i)'(t)+k(a)\mu_a^i(t)=\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a}\left\{2\cdot\sum_{k=0}^{\left[\frac{t-\|b-a\|}{2\|b-a\|}\right]}(\mu_b^{i-1})'(t-(2k+1)\|b-a\|)-\right.$$

$$\left.-2\cdot\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{2\|b-a\|}\right]}(\mu_a^{i-1})'(t-2k\|b-a\|)+\psi_{a,b}(t)\right\}\qquad (a\in N(\Gamma),\ t\in[s_{i-1};s_i]), \tag{12_i}$$

$$\mu_a^i(s_{i-1})=\mu_a^{i-1}(s_{i-1})\qquad (a\in N(\Gamma)). \tag{13_i}$$

Мы докажем, что набор функций $\{\mu_a(t)\}_{a\in N(\Gamma)}$, определяемый равенствами $\mu_a(t)=\mu_a^i(t)$ $(t\in[s_{i-1};s_i])$, $i\in\mathbf{N}$, и есть решение задачи (6), (7).

Сразу же отметим, что для *так определённых* функций μ_a выполняются начальные условия (7) и уравнение (6) при $t\in[0;+\infty)\setminus S$. Последнее обстоятельство влечёт и равномерную непрерывность вторых производных функций μ_a на каждом интервале $(s_{i-1};s_i)$ $(i\in\mathbf{N})$ – ввиду равномерной непрерывности $(\psi_{a,b})'$ на каждом таком интервале. Остаётся показать выполнение (6) в точках S для функций μ_a и непрерывность их вторых производных в этих точках. А для этого достаточно показать, что в каждой точке S существуют и совпадают односторонние пределы функций $(\mu_a)'$ и $(\mu_a)''$.

Из (12_1) и (13_1) в силу (2) (при $t=0$) имеем $(\mu_a)'(0+)=0$, что после дифференцирования (12_1) влечёт и существование $(\mu_a)''(0+)$, равного общему значению производных $\varphi_{hh}^{++}(a)$ $(h\in D(a))$.

---

[4]Там показано, что функционал полной энергии в (1)–(3) не зависит от t, откуда и следует единственность решения (1)–(3).

Дальнейшее рассуждение проведём индукцией по i (номеру точки s_i). Положим $B_=(a) := \{b\,|\,b \leftrightarrow a \wedge \|b-a\| = s_i\}$ и $B_{\neq}(a) := \{b\,|\,b \leftrightarrow a \wedge \|b-a\| \neq s_1\}$. Из ($12_2$) получим:

$$|D(a)|(\mu_a)'(s_1+) = |D(a)|(\mu_a^2)'(s_1+) = -k(a)\mu_a^2(s_1) + \sum_{b\in B_=(a)} \left\{2(\mu_b^1)'((s_1-\|b-a\|)+)\right\} +$$

$$+\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \psi_{a,b}(s_1) = -k(a)\mu_a(s_1) + 2\cdot\sum_{b\in B_=(a)} (\mu_b^1)'(0+) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \psi_{a,b}(s_1) =$$

$$= -k(a)\mu_a(s_1) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \psi_{a,b}(s_1),$$

что равно $|D(a)|(\mu_a)'(s_1-)$ в силу (12_1). Дифференцируя (12_2), получим:

$$|D(a)|(\mu_a)''(s_1+) = |D(a)|(\mu_a^2)''(s_1+) = -k(a)(\mu_a)'(s_1) + \sum_{b\in B_=(a)} \left\{2(\mu_b^1)''((s_1-\|b-a\|)+)\right\} +$$

$$+\sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} (\psi_{a,b})'(s_1+) = -k(a)(\mu_a)'(s_1) + 2\cdot\sum_{b\in B_=(a)} \varphi_{hh}^{++}(b) - \sum_{b\in B_=(a)} (\psi_{a,b})'(s_1-)+$$

$$+\sum_{b\in B_{\neq}(a)} (\psi_{a,b})'(s_1) = -k(a)(\mu_a)'(s_1) + \sum_{b\in B_=(a)} \varphi_{hh}^{++}(b) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)} (\psi_{a,b})'(s_1),$$

где h – любой вектор из $D(b)$. Из (12_1) следует:

$$|D(a)|(\mu_a)''(s_1-) = -k(a)(\mu_a)'(s_1) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} (\psi_{a,b})'(s_1-) =$$

$$= -k(a)(\mu_a)'(s_1) + \sum_{b\in B_=(a)} (\psi_{a,b})'(s_1-) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)} (\psi_{a,b})'(s_1) =$$

$$= -k(a)(\mu_a)'(s_1) + \sum_{b\in B_=(a)} \varphi_{hh}^{++}(b) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)} (\psi_{a,b})'(s_1),$$

где h – любой вектор из $D(b)$. Сравнивая выражения, полученные для $|D(a)|(\mu_a)''(s_1+)$ и $|D(a)|(\mu_a)''(s_1-)$, видим, что они равны.

Итак, функции μ_a дважды непрерывно дифференцируемы на $[0; s_2)$. Достаточно доказать теперь, что если μ_a дважды непрерывно дифференцируемы на $[0; s_i)$, где $i \geq 2$, то они дважды непрерывно дифференцируемы и на $[0; s_{i+1})$, для чего остаётся показать, что $(\mu_a)'(s_i-) = (\mu_a)'(s_i+)$ и $(\mu_a)''(s_i-) = (\mu_a)''(s_i+)$. В силу определения функций μ_a предположение об их двукратной непрерывной дифференцируемости на $[0; s_i)$ влечёт выполнение для всех $t \in [0; s_i) \cup (s_i; s_{i+1})$ равенств

$$\begin{aligned}|D(a)|(\mu_a)'(t) = -k(a)\mu_a(t) + \sum_{b\,|\,b\leftrightarrow a} \Bigg\{ 2\cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-\|b-a\|}{2\|b-a\|}\right]} (\mu_b)'(t-(2k+1)\|b-a\|) - \\ -2\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{2\|b-a\|}\right]} (\mu_a)'(t-2k\|b-a\|) + \psi_{a,b}(t)\Bigg\} \qquad (a \in N(\Gamma)),\end{aligned} \tag{14}$$

правые части которых непрерывны в точке s_i, что сразу приводит к равенству $(\mu_a)'(s_i-) = (\mu_a)'(s_i+)$. Дифференцируя теперь равенство (14) в проколотой окрестности точки $t = s_i$, не пересекающейся с S, и переходя к пределам при $t \to s_i\pm$, получим (ниже $B(a) :=$

$\{b\,|\,b \leftrightarrow a \wedge s_i \in \|b-a\|\mathbf{N}\}$, $B_1(a) := \{b\,|\,b \leftrightarrow a \wedge s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N}-1)\}$, $B_2(a) := \{b\,|\,b \leftrightarrow a \wedge s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N})\}$ и $k_i := (s_i - \|b-a\|)/(2\|b-a\|)$):

$$|D(a)|[(\mu_a)''(s_i+) - (\mu_a)''(s_i-)] = 2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}\sum_{k=0}^{k_i}(\mu_b)''((s_i-(2k+1)\|b-a\|)+)-$$

$$-2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}\sum_{k=0}^{k_i-1}(\mu_b)''((s_i-(2k+1)\|b-a\|)-) - 2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}\sum_{k=1}^{k_i+1/2}(\mu_a)''((s_i-2k\|b-a\|)+)+$$

$$+2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}\sum_{k=1}^{k_i-1/2}(\mu_a)''((s_i-2k\|b-a\|)-) + \sum_{b\in B(a)}(\psi_{a,b})'(s_i+) - \sum_{b\in B(a)}(\psi_{a,b})'(s_i-) =$$

$$= 2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}(\mu_b)''(0+) - 2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}(\mu_a)''(0+) + 2\cdot\sum_{b\in B(a)}(\psi_{a,b})'(s_i+) =$$

$$= 2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}\left\{(\mu_b)''(0) + (\psi_{a,b})'(s_i+)\right\} + 2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}\left\{-(\mu_a)''(0) + (\psi_{a,b})'(s_i+)\right\}.$$

Обе последние суммы равны нулю. В самом деле, если $b \in B_1(a)$, т. е. $b \leftrightarrow a$ и $s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N}-1)$, то $(\psi_{a,b})'(s_i+) = -\varphi^{++}_{hh}(b) = -(\mu_b)''(0)$, где h – любой вектор из $D(b)$; если же $b \in B_2(a)$, т. е. $b \leftrightarrow a$ и $s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N})$, то $(\psi_{a,b})'(s_i+) = \varphi^{++}_{\eta\eta}(a) = (\mu_a)''(0)$, где η – любой вектор из $D(a)$. Равенство $(\mu_a)''(s_i-) = (\mu_a)''(s_i+)$ доказано, а вместе с ним – и теорема.

Следствие. Решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

В заключение автор выражает признательность А. В. Боровских за обсуждение проекта данной публикации, поспособствовавшее улучшению изложения.

Список литературы

[1] Бурлуцкая М. Ш. *Граничное управление системой из трех струн* // Тр. XXVI Конф. молодых уч. мех.-мат. ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова. Т. I. - М.: Мех.-мат. ф-т МГУ, 2004. - С. 33-36.

[2] Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001. - 400 с.

[3] Знаменская Л. Н. *Управление упругими колебаниями.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 176 с.

[4] Ильин В. А., Тихомиров В. В. *Волновое уравнение с краевым управлением* // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, N 1. - С. 137-138.

[5] Ильин В. А., Тихомиров В. В. *Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса* // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, N 5. - С. 692-704.

[6] Копытин А. В. *Некоторые вопросы теории эволюционных задач на сетях*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. - Воронеж, 2002. - 77 с.

[7] Копытин А. В., Прядиев В. Л. *Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми рёбрами* // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Серия "Физика, Математика". - 2001, N 1. - С. 104-107.

[8] Найдюк Ф. О. *О свойствах решений гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. - Воронеж, 2004. - 134 с.

[9] Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л. *Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода* // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Серия "Физика, Математика". - 2004. - N 1. - С. 115-120.

[10] Покорный Ю.В., Пенкин О.М. *Теоремы Штурма для уравнений на графах* // ДАН СССР. - 1989. - Т. 309, N 6. - С. 1306-1308.

[11] Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. *Волновое уравнение на пространственной сети* // Докл. РАН. - 2003. - Т. 388, N 1. - С. 16-18.

[12] Прядиев В. Л. *Свойства фундаментального решения смешанной задачи для волнового уравнения на графе* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. - Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. - С. 202-203.

[13] Прядиев В. Л., Прядиева Е. В. *Метод граничных режимов в решении волнового уравнения на геометрическом графе* // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 5-10 июля 2004 г.) : Тез. докл. - Владимир, 2004. - С. 171-172.

[14] Прядиев В. Л., Шаталов С. С. *Правило параллелограмма для волновых уравнений на сетях. Визуализация решений* // Современные методы теории функций и смежные проблемы": Материалы конференции. - Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. - С. 206-207.

[15] Ali Mehmeti F. *Nonlinear waves in networks* // Mathematical Research; Vol. 80. - Berlin: Akademie Verlag, 1994. - 174 p.

[16] Cattaneo C., Fontana L. *D'Alambert formula on finite one-dimensional networks* // J. of Math. Anal. and Appl. - 2003. - V. 284, N 2. - P. 403-424.

[17] Pryadiev V. L., Kopytin A. V. *On the laplacian spectrum on a graph with commensurable edges* : Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Math. School-Symposium "Spectral and Evolutional problems". V. 11. - Simferopol, 2001. - P. 167-172.

Прядиев В. Л., доцент, Воронежский государственный университет, Воронеж, 394019, Россия

E-mail: pryad@mail.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Е. Товмасян
Государственный Инженерный Университет Армении
Ереван, Армения

В работе предлагается метод решения задачи Дирихле в классе непрерывных функций, который позволяет привести ее к аналогичной задаче в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы области. Предложенный метод используется для решения задачи Дирихле для модельного эллиптического уравнения второго порядка.

We propose a method of solution of the Dirichlet problem in a class of continuous functions. Using this method we can reduce this problem to the same one in a class of functions satisfying the Hölder condition up to the boundary. The proposed method was used for the solution of the Dirichlet problem for a model second order elliptic equation.

Пусть D– односвязная ограниченная область комплексной плоскости с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial D$, $(0 \in D)$. Рассмотрим следующие дифференциальные операторы первого порядка

$$L_j \equiv \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} - a_j I, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

где λ_j и a_j - комплексные постоянные, I– единичный оператор. Предполагаем, что

$$\Im\lambda_1 > 0, \quad \Im\lambda_2 < 0. \tag{2}$$

В области D рассмотрим следующую задачу Дирихле

$$L_1 L_2 u = 0, \quad z \in D, \tag{3}$$

$$u(t) = f(t), \quad t = x_0 + iy_0, \quad (x_0, y_0) \in \Gamma, \tag{4}$$

где $f \in C(\Gamma)$ – заданная, а $u \in C(\overline{D}) \bigcap C(\Gamma)$ – искомая функции. Пусть $H(\overline{D})$ $(H(\Gamma))$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера в $\overline{D}$ (на Γ). В случае, когда $u \in H(\overline{D})$ и $f \in H(\Gamma)$, задача Дирихле для более общих эллиптических уравнений исследована в работах многих авторов (см., например, [1]–[3]). В классах Гельдера удается написать интегральное представление решения эллиптических уравнений и использовать теорию сингулярных интегральных уравнений [4]. При этом важную роль играет ограниченность интеграла типа Коши с плотностью из класса Гельдера. При решении этих задач в классах непрерывных функций возникают определенные трудности. В этой работе мы укажем метод решения задачи Дирихле в этих классах и проиллюстрируем эффективность этого метода при исследовании модельной задачи (3), (4). В работе доказывается следующая

Theorem 1. *Задача (3), (4) имеет единственное решение.*

Доказательство. Общее решение уравнения (3) определяется формулой ([1], стр. 10)

$$u(x, y) = e^{a_1 y}\varphi_1(x + \lambda_1 y) + e^{a_2 y}\varphi_2(x + \lambda_2 y) \tag{5}$$

где $\varphi_j(j)$ – аналитическая функция относительно переменной ζ в области $D_j = \{x + \lambda_j y | (x, y) \in D\}$ $(j = 1, 2)$ и

$$\varphi_2(0) = 0, \tag{6}$$

причем φ_j определяются по функции u однозначно. Сначала докажем, что однородная задача (3), (4) (при $f \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Пусть u– решение однородной задачи (3), (4). Тогда в формуле (5) функции $\varphi_j(x+\lambda_j y)$ принадлежат классу $H(\overline{D})$ (см. [3]). Подставляя u из (5) в граничное условие (4), получим

$$e^{a_1 y}\varphi_1(x+\lambda_1 y)+e^{a_2 y}\varphi_2(x+\lambda_2 y) \quad (x,y)\in\Gamma. \tag{7}$$

Из (2) и (6) следует, что задача сопряжения (7) имеет только нулевое решение, т. е. $\varphi_j\equiv 0$ $(j=1,2)$ [5], стр. 129. Пусть сначала $f\in H(\Gamma)$. Тогда решение ищем в виде (5), где $\varphi_j(x+\lambda_j y)\in H(\overline{D})$ $(j=1,2)$. При этом условии функции φ_j $(j=1,2)$ представляются в виде (см. [1], стр. 15)

$$\varphi_j(x+\lambda_j y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-a_j\eta}\mu(t)d(\xi+\lambda_j\eta)}{\xi+\lambda_j\eta-x-\lambda_j y}+c_j, \quad t=\xi+i\eta\in\Gamma, \tag{8}$$

где $\mu\in H(\Gamma)$,

$$c_1=0, \qquad c_2=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-a_2\eta}\mu(t)d(\xi+\lambda_2\eta)}{\xi+\lambda_2\eta}, \tag{9}$$

причем функция μ определяется через φ_1 и φ_2 единственным образом. Введем следующие обозначения

$$\alpha_j(z)=x+\lambda_j y, \quad (x,y)\in D, \quad \alpha_j'(t)=\lim_{\zeta\to t,\zeta\in\Gamma}\frac{\alpha_j(\zeta)-\alpha_j(t)}{\zeta-t}, \quad t\in\Gamma. \tag{10}$$

Подставляя φ_j $(j=1,2)$ из (8) в (5) и учитывая обозначения (10), получим

$$u(z)=M(\mu)(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(z,t)\mu(t)dt+c_2, \quad z\in D, \tag{11}$$

где

$$K(z,t)=\frac{e^{a_1(y-\eta)}\alpha_1'(t)}{\alpha_1(z)-\alpha_1(t)}-\frac{e^{a_2(y-\eta)}\alpha_2'(t)}{\alpha_2(z)-\alpha_2(t)}. \tag{12}$$

Если в области D функция u определяется формулой (11) и $z_0=x_0+iy_0\in\Gamma$, то $u(z_0)$ – предельное значение функции $u(z)$ при $z\to z_0$, $z\in D$. В (11) переходя к пределу при $z\to z_0$ из формулы Сохоцкого – Племеля, [4], стр. 64, учитывая, что $\mu\in H(\Gamma)$, получим

$$u(z_0)=N(\mu)(z_0)\equiv\mu(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(z_0,t)\mu(t)dt, \quad z_0\in\Gamma. \tag{13}$$

Подставляя $u(z_0)$ из (13) в (4), получим

$$\mu(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(z_0,t)\mu(t)dt=f(z_0), \quad z_0\in\Gamma. \tag{14}$$

Отметим, что $K(z_0,t)$ представляется в виде (см. [4], стр. 573)

$$K(z_0,t)=K_0(z_0,t)|z_0-t|^{-\alpha}, \quad z_0\in\Gamma, \quad t\in\Gamma, \tag{15}$$

где $0\le\alpha<1$, а $K_0(z_0,t)$ принадлежит классу $H(\Gamma)$ по переменным z_0 и t. Уравнение (14) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Однородное уравнение (14) имеет только нулевое решение, так как в противном случае ненулевому решению этого уравнения соответствовало бы ненулевое решение однородной задачи (3), (4), что невозможно. Следовательно, неоднородное уравнение (14) всегда имеет единственное. Таким образом, при $f\in H(\Gamma)$ задача (3), (4) всегда разрешима.

Пусть теперь f – непрерывная функция на Γ. Если D – единичный круг, то для функции K имеет место следующая оценка

$$|K(z,t)|\le C_1\frac{1-z\overline{z}}{|z-t|^2}+C_2, \quad |z|<1, \quad |t|=1, \tag{16}$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные постоянные. Оценка (16) при $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $a_1 = a_2 = 0$ доказана в [6], стр. 219. Общий случай доказывается аналогично. Рассмотрим операторы M и N, определенные в (11) и (13). Если D – единичный круг, то из (16) следует, что M – ограниченный оператор при $u \in C(\Gamma)$, то есть

$$|M(\mu)(z)| \le C \max_{t\in\Gamma} |\mu(t)|, \quad z \in D. \tag{17}$$

Пусть D – односвязная область с достаточно гладкой границей Γ, а $z = \omega(\zeta)$ – конформное отображение круга $\{\zeta||\zeta| < 1\}$ на область D. Делая в операторе M замену $z = \omega(\zeta)$ и $t = \omega(\tau)$, мы докажем неравенство (17) и в этом случае. Из оценки (15) следует, что

$$|N(\mu)(z_0)| \le C \max_{t\in\Gamma} |\mu(t)|, \quad z_0 \in \Gamma. \tag{18}$$

В (17) и (18) мы можем взять ту же самую постоянную C.

Теперь докажем справедливость формулы (13) при $\mu \in C(\Gamma)$. Для этого рассмотрим разность $M(\mu)(z) - N(\mu)(z_0)$ при $z \in D$, $z_0 \in \Gamma$. Представим эту разность в виде

$$M(\mu)(z) - N(\mu)(z_0) = M(\mu - \nu)(z) + M(\nu)(z) - N(\nu)(z_0) + N(\nu - \mu)(z_0), \tag{19}$$

где $\nu \in H(\Gamma)$ и $|\mu(t) - \nu(t)| \le \varepsilon(3C)^{-1}$ при всех $t \in \Gamma$. Здесь ε – заданное положительное число, C – постоянная, входящая в (17) и (18). Из (13), (17), (18) и (19) следует справедливость формулы (13) при $\mu \in C(\Gamma)$. В случае, когда $f \in C(\Gamma)$, решение задачи (3), (4) мы опять будем искать в виде (11), где $\mu \in C(\Gamma)$. Тогда, подставляя u из (11) в граничное условие (4) и используя формулу (13) при $\mu \in C(\Gamma)$, получим интегральное уравнение (14), которое имеет единственное решение. Теорема доказана. □

При доказательстве этой теоремы мы доказали также следующее важное утверждение

Theorem 2. *Решение задачи (3), (4) определяется формулой (11), где μ – решение однозначно разрешимого уравнения Фредгольма (14).*

Пусть теперь D – $(m+1)$-связная область с достаточно гладкой границей Γ. Используя общее решение уравнения (3) в многосвязной области, приведенное в [1], стр. 10, задачу (3), (4) в этой области можем также свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма вида (14), причем это уравнение имеет единственное решение при $a_1 = a_2 = 0$.

Теперь мы рассмотрим граничную задачу Дирихле для слабо связанной системы (см. [2])

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \quad z \in D, \tag{20}$$

$$u(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{21}$$

где A, B и C – квадратные матрицы порядка n с постоянными действительными элементами, $u(z) = (u_1(z), \dots, u_2(z))^\top$ действительное решение из класса $C(\overline{D})$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_2(t))^\top$ – действительная вектор-функция из класса $C(\Gamma)$. В монографии [2], стр. 116, исследована задача (20), (21) в случае, когда $u \in H(\overline{D})$, $f \in H(\Gamma)$ и доказана фредгольмовость этой задачи. Получено также интегральное представление системы (20) в классе $H(\overline{D})$. Это представление имеет вид

$$u(t) = \int_\Gamma Q(z,t)\mu(t)dt, \quad z \in D, \tag{22}$$

где $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_2(t))^\top \in H(\Gamma)$, а Q – некоторая достаточно гладкая по z и t ($z \in D$, $t \in \Gamma$) квадратная матрица порядка n. Отметим, что интегральные представления (22) для одного итого же уравнения могут быть разными. Они выбираются соответствующим образом для каждой конкретной задачи. Теперь мы сформулируем следующую общую теорему

Theorem 3. *Пусть $\mu \in H(\Gamma)$, $z_0 \in \Gamma$. Если*

$$\left| \int\limits_{\Gamma} Q(z,t)\mu(t)dt \right| \le c \max_{t\in\Gamma} |\mu(t)|, \quad z \in D, \tag{23}$$

$$\lim_{z\to z_0, z\in D} \int\limits_{\Gamma} Q(z,t)\mu(t)dt = \mu(z_0) + \int\limits_{\Gamma} Q(z_0,t)\mu(t)dt, \tag{24}$$

Решение задачи (20), (21) определяется формулой (22), где μ является произвольным непрерывным решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\mu(z_0) + \int\limits_{\Gamma} Q(z_0,t)\mu(t)dt = f(z_0), \quad z_0 \in \Gamma. \tag{25}$$

Доказательство. В случае, когда уравнение (25) имеет единственное решение, доказательство не отличается от доказательства теоремы 1. Пусть однородное уравнение (25) имеет k_0 линейно независимых решений ($k_0 \ge 1$). Тогда, как известно, необходимые и достаточные условия, при которых неоднородное уравнение (25) имеет решение, представляются в виде

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\overline{g_j(t)}dt \equiv (f, g_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, k_0. \tag{26}$$

где g_j ($j = 1, \ldots, k_0$)– некоторая ортонормированная система функций из $H(\Gamma)$. Пусть u – решение задачи (20), (21). Рассмотрим вспомогательную задачу

$$Av_{xx} + Bv_{xy} + Cv_{yy} = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{27}$$

$$v(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{k_0} (f, g_j) g_j(t), \quad t \in \Gamma, \tag{28}$$

Решение v ищем в виде (22), где $\mu \in C(\Gamma)$. Как мы показали выше, из (23) и (24) при $\mu \in H(\Gamma)$следует, что равенство (24) имеет место и при $\mu \in C(\Gamma)$. Подставляя

$$v(z) = \int\limits_{\Gamma} Q(z,t)\mu(t)dt, \quad z_0 \in \Gamma, \tag{29}$$

в граничное условие (28) и используя формулу (24) при $\mu \in C(\Gamma)$, получим

$$\mu(z_0) + \int\limits_{\Gamma} Q(z_0,t)\mu(t)dt = f(z_0) - \sum_{j=1}^{k_0} (f, g_j) g_j(z_0), \quad z_0 \in \Gamma. \tag{30}$$

Из (26) следует, что интегральное уравнение (30) всегда имеет решение. Из (21) и (28) следует, что на Γ имеет место равенство

$$u(z) - v(z) = \sum_{j=1}^{k_0} (f, g_j) g_j(z) \in H(\Gamma),$$

поэтому (см. [3]) $u - v \in H(\overline{D})$. Следовательно, эта разность представляется в виде (22) при некотором $\mu = \mu_0 \in H(\Gamma)$. Отсюда и из (29) следует, что u представляется в виде (22), где μ – некоторая вектор-функция из класса $C(\Gamma)$. Из формулы (24) при $\mu \in C(\Gamma)$, следует, что любая функция вида (22) является решением уравнения (20) из класса $C(\overline{D})$. Подставляя u из (22) в граничное условие (21) и используя формулу (24) при $\mu \in C(\Gamma)$, получим интегральное уравнение (25). Теорема доказана. □

При доказательстве этой теоремы мы доказали также следующее утверждение

Theorem 4. *Пусть общее решение эллиптической системы (20) в классе $H(\Gamma)$ определяется формулой (22). Если при $\mu \in H(\Gamma)$ имеют место соотношения (23) и (24), то общее решение системы (20) в классе $C(\overline{D})$ также определяется формулой (22), где μ – произвольная n – мерная вектор-функция из класса $C(\Gamma)$.*

Итак, решение задачи (20), (21) при $f \in C(\Gamma)$ приводится построению общего решения (22) системы (20) в классе $H(\overline{D})$, удовлетворяющего дополнительным условиям (23) и (24).

Список литературы

[1] Н. Е. Товмасян, Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях, Известия НАН Армении, Математика, т. 37, 6, 2002, с. 5-40.

[2] А.В.Бицадзе Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966.204с.

[3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Москва, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

[4] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Москва, "Наука", 1968.

[5] Г. С. Литвинчук, Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, Москва, "Наука", 1977.

[6] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Москва, "Наука", 1987.

Товмасян Н.Е., профессор, чл.-корр.НАН Армении, ГИУА, департамент математики, Ереван, 375033, Армения *E-mail:* name@postserver.ru

ДИССИПАТИВНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. А. Ширяев
МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет
г.Москва, Россия

Доказываются теоремы, дающие описание краевых условий, при которых оператор $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ на конечном интервале является диссипативным. Доказано, что при четном $m = 2n$ все такие краевые условия являются регулярными по Биркгофу, а при нечетном m это не всегда верно (построен контрпример).

In this paper two theorems which describe dissipative boundary conditions for ordinary differential operators on a closed interval are proved. We also show that all these boundary conditions are Birkhoff regular in even case. In odd case this is not true and we bring an example which demonstrates it.

В работе [1] Дж. Д. Биркгоф развил асимптотические методы для исследования обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка, порожденных выражением

$$l(y) = (-1)^m y^{(m)} + (-1)^{m-2}[p_2(x)y]^{(m-2)} + \cdots + p_m(x)y, \tag{1}$$

где функции $p_k(x)$ бесконечно дифференцируемы на $[a, b]$, и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{j\,k} y^{(k)}(a) + b_{j\,k} y^{(k)}(b) = 0,\ j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

В частности, он выделил важный класс краевых условий, которые назвал регулярными. Оператор, порожденный выражением (1) и регулярными краевыми условиями (2), здесь мы также условимся называть регулярным. Отметим, что в определении регулярности участвуют только коэффициенты в линейных формах (2), и не участвуют коэффициенты $p_j(x)$ дифференциального выражения.

Важный результат, установленный Биркгофом, состоял в оценке резольвенты регулярного дифференциального оператора. Оценка получалась, по существу, такой же, как для самосопряженных краевых условий, т.е. условий, при которых оператор L_0, порожденный выражением $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ самосопряжен. Задача о том, являются ли самосопряженные условия регулярными, оказалась непростой. Она была положительно решена С. Салафом [2] для четных m и для произвольного порядка А. М. Минкиным [3].

Ниже расматривается оператор L_0, порожденный дифференциальным выражением $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ с областью определения $D(L_0) = \{y \in W_2^m[0, 1],\, U_j(y) = 0,\, j = 1, \ldots, m\}$. Здесь через W_2^m обозначено пространство Соболева.

Краевые условия (2) назовем диссипативными, если оператор L_0 является диссипативным, т.е. $\mathrm{Im}(L_0 y,\, y) \geqslant 0$.

Представлено описание всех диссипативных краевых условий и выяснен вопрос, являются ли такие условия регулярными. Отметим следующий факт: если мы докажем, что диссипативный оператор L_0 регулярен, то произвольный оператор L, порожденный дифференциальным выражением (1) и теми же краевыми условиями, что и L_0, будет регулярен.

1. Описание диссипативных краевых условий.

В этом параграфе приведены необходимые и достаточные условия диссипативности краевых условий.

Для краткости записи введем векторы-строки:

$$\widehat{y}_0 := (y(0), \ldots, y^{(m-1)}(0));$$

$$\widehat{y}_1 := (y(1), \ldots, y^{(m-1)}(1));$$

$$\widehat{y} := (\widehat{y}_0,\ \widehat{y}_1) = \big(y(0), \ldots, y^{(m-1)}(0),\ y(1), \ldots, y^{(m-1)}(1)\big).$$

Через $\widehat{y}_0^*$, $\widehat{y}_1^*$, $\widehat{y}^*$, A^* будем обозначать соответствующие векторы-столбцы и матрицы с комплексно сопряженными компонентами, а символ „t“ на месте верхнего индекса будет означать транспонирование вектора или матрицы без комплексного сопряжения компонент. Для обозначения матриц и векторов, компоненты которых комплексно сопряжены исходным, будем ставить сверху черту. То есть, $A^* = \overline{A}^{\mathrm{t}}$

Заметим, что краевые условия в новых обозначениях можно переписать в виде $A\widehat{y}_0^{\mathrm{t}} + B\widehat{y}_1^{\mathrm{t}} = 0$, где A и B—матрицы порядка m.

Лемма 1. *Имеем*

$$2\,\mathrm{Im}\,(L_0 y, y) = \begin{cases} i(-1)^{n+1}\big[\,\widehat{y}_1 J\widehat{y}_1^* - \widehat{y}_0 J\widehat{y}_0^*\,\big],\ m = 2n \\ (-1)^n\big[\,\widehat{y}_1 K\widehat{y}_1^* - \widehat{y}_0 K\widehat{y}_0^*\,\big],\ m = 2n-1, \end{cases}$$

где матрицы J и K выглядят следующим образом:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & . & & \vdots \\ 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \\ \vdots & & . & & \vdots \\ 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\mathrm{Im}\,(L_0 y, y) = \frac{1}{2i}\big((L_0 y, y) - (y, L_0 y)\big)$$

Интегрируя $(L_0 y, y)$ m раз по частям, получим

$$2\,\mathrm{Im}\,(L_0 y, y) = (-i)\Big[(-i)^m\Big(y^{(m-1)}\overline{y} - \ldots + (-1)^{m-1}y\overline{y^{(m-1)}}\Big)\Big|_0^1\Big] =$$

$$= \begin{cases} i(-1)^{n+1}\big[\,\widehat{y}_1 J\widehat{y}_1^* - \widehat{y}_0 J\widehat{y}_0^*\,\big],\ m = 2n \\ (-1)^n\big[\,\widehat{y}_1 K\widehat{y}_1^* - \widehat{y}_0 K\widehat{y}_0^*\,\big],\ m = 2n-1, \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть $m = 2n$ и краевые условия заданы в форме $A\widehat{y}_0^{\mathrm{t}} + B\widehat{y}_1^{\mathrm{t}} = 0$, где A и B—матрицы порядка $2n$. Если $\forall y \in D(L)$*

$$\widehat{y}_1(-i(-1)^n J)\widehat{y}_1^* - \widehat{y}_0(-i(-1)^n J)\widehat{y}_0^* \geqslant 0,$$

то

$$[\overline{A}(-i(-1)^n J)A^{\mathrm{t}} - \overline{B}(-i(-1)^n J)B^{\mathrm{t}}] \leqslant 0. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $\widehat{U}_j = (a_{0j},\ a_{1j}, \ldots, a_{2n-1\,j},\ b_{0j},\ b_{1j}, \ldots, b_{2n-1\,j})$, $j = 1, \ldots, 2n$ строки, состоящие из коэффициентов краевых условий (2). Тогда равенство $U_j(y) = 0$ можно переписать в виде

$$\langle\overline{\widehat{U}}_j,\ \widehat{y}^{\,\mathrm{t}}\rangle_{4n} = 0 \tag{4}$$

Последнее выражение—скалярное произведение в $4n$-мерном пространстве над $\mathbb{C}$. Строки $\overline{\widehat{U}}_j$ образуют линейное подпространство размерности $2n$ (здесь и далее будем полагать, что краевые условия линейно независимы). Обозначим через $\mathfrak{N}$ подпространство размерности $2n$ состоящее из решений системы уравнений (4), а через $\mathfrak{L}$—подпространство $\mathrm{span}(\{\overline{\widehat{U}}_j\}_{j=1}^{2n})$. Тогда $\mathfrak{N}$ ортогонально $\mathfrak{L}$. Положим

$$M := \begin{pmatrix} i(-1)^n J & 0 \\ 0 & -i(-1)^n J \end{pmatrix},$$

тогда

$$\widehat{y}\, M\, \widehat{y}^* \geqslant 0 \quad \forall\, \widehat{y} \in \mathfrak{N}. \tag{5}$$

У матрицы M два собственных значения: 1 и (-1). Каждое из них имеет кратность $2n$. Пусть $\{\widehat{x}_j^-\}_{j=1}^{2n}$, $\{\widehat{x}_j^+\}_{j=1}^{2n}$—базис, в котором M диагонализируется: сперва на диагонали стоят „-1“, потом „1“. Перейдем в $\mathbb{C}^{4n}$ посредством ортогонального преобразования к базису, состоящему из векторов $\{\widehat{x}_1^-, \widehat{x}_2^-, \ldots, \widehat{x}_{2n}^-, \widehat{x}_1^+, \widehat{x}_2^+, \ldots, \widehat{x}_{2n}^+\}$. Обозначим $\mathfrak{N}_- = \mathrm{span}(\{\widehat{x}_j^-\}_{j=1}^{2n})$ и $\mathfrak{N}_+ = \mathrm{span}(\{\widehat{x}_j^+\}_{j=1}^{2n})$. Отметим, что $\forall\, \widehat{x} \in \mathfrak{N}_-$ $\widehat{x}M\widehat{x}^* \leqslant 0$ и $\forall\, \widehat{x} \in \mathfrak{N}_+$ $\widehat{x}M\widehat{x}^* \geqslant 0$.

Рассмотрим операторы S_- и S_+, которые проецируют $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{N}_-$ и $\mathfrak{N}_+$ соответственно. $\forall\, \widehat{x} \in \mathfrak{N}_+$ существует не более одного $\widehat{y} \in \mathfrak{N}$: $S_+(\widehat{y}) = \widehat{x}$. В противном случае, если найдутся такие $\widehat{y}_1$ и $\widehat{y}_2$, $(\widehat{y}_1 - \widehat{y}_2)M(\widehat{y}_1 - \widehat{y}_2)^* < 0$. Это означает, что у оператора S_+ есть обратный (также линейный). В силу этого подпространству $\mathfrak{N}$ принадлежат те и только те векторы, координаты которых в базисе $\{\widehat{x}_1^-, \widehat{x}_2^-, \ldots, \widehat{x}_{2n}^-, \widehat{x}_1^+, \widehat{x}_2^+, \ldots, \widehat{x}_{2n}^+\}$ состоят из последовательно выписанных координат вектора $(S_-S_+^{-1})(\widehat{x})$ в базисе $\{\widehat{x}_j^-\}_{j=1}^{2n}$ пространства $\mathfrak{N}_-$ и координат $\widehat{x}$ в базисе $\{\widehat{x}_j^+\}_{j=1}^{2n}$ пространства $\mathfrak{N}_+$ $(\forall \widehat{x} \in \mathfrak{N}_+)$. Будем записывать это так:

$$\mathfrak{N} = \left\{ \left((S_-S_+^{-1})(\widehat{x})\,,\, \widehat{x} \right) \;|\; \widehat{x} \in \mathfrak{N}_+ \right\}.$$

Теперь дадим аналогичное описание для $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^\perp$. А именно, представим оператор $T : \mathfrak{N}_- \to \mathfrak{N}_+$ такой, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^\perp = \{(\,\widehat{y},\, T(\widehat{y}))\;|\; \widehat{y} \in \mathfrak{N}_-\}$. Зафиксируем в подпространствах $\mathfrak{N}_-$ и $\mathfrak{N}_+$ базисы $\{\widehat{x}_j^-\}_{j=1}^{2n}$ и $\{\widehat{x}_j^+\}_{j=1}^{2n}$ соответственно. Пусть S—матрица оператора $S_-S_+^{-1} : \mathfrak{N}_+ \to \mathfrak{N}_-$ в этих базисах. Тогда рассмотрим линейный оператор из $\mathfrak{N}_-$ в $\mathfrak{N}_+$, матрица которого при фиксированных базисах $\{\widehat{x}_j^-\}_{j=1}^{2n}$ и $\{\widehat{x}_j^+\}_{j=1}^{2n}$ равна $(-S^*)$. Это и есть искомый оператор T.

Из (5) следует, что $\forall\, \widehat{x} \in \mathfrak{N}_+$ $\langle (S_-S_+^{-1})(\widehat{x}),\, (S_-S_+^{-1})(\widehat{x})\rangle_{2n} \leqslant \langle \widehat{x},\, \widehat{x}\rangle_{2n}$, а значит, $\forall\, \widehat{x} \in \mathfrak{N}_-$ $\langle T(\widehat{x}),\, T(\widehat{x})\rangle_{2n} \leqslant \langle \widehat{x},\, \widehat{x}\rangle_{2n}$. Следовательно, $\forall\, \widehat{y} \in \mathfrak{N}^\perp \quad \widehat{y}\, M\, \widehat{y}^* \leqslant 0$.

Поскольку $\mathfrak{N}^\perp = \mathfrak{L}$—подпространство, являющееся линейной оболочкой $\{\overline{\widehat{U}}_j\}_{j=1}^{2n}$, то

$$[\overline{A}(-i(-1)^n J)A^{\mathrm{t}} - \overline{B}(-i(-1)^n J)B^{\mathrm{t}}] \leqslant 0$$

Лемма 2 доказана.

Из доказательства леммы 2 ясно, что если A и B удовлетворяют (3), то они задают диссипативные условия.

В нечетном случае диссипативные условия описываются так же. Причина этого в том, что и в нечетном случае у матрицы M будет одинаковое количество „1“ и „-1“ в диагонализованном виде. Таким образом, доказана теорема, дающая представление об алгебраической структуре диссипативных расширениях оператора L_0.

Теорема 1. *Матрицы A и B задают диссипативные краевые условия тогда и только тогда, когда*

$$[\overline{A}(-i(-1)^n J)A^{\mathrm{t}} - \overline{B}(-i(-1)^n J)B^{\mathrm{t}}] \leqslant 0$$

в четном случае,

$$[\overline{A}(-1)^n K A^{\mathrm{t}} - \overline{B}(-1)^n K B^{\mathrm{t}}] \leqslant 0$$

в нечетном случае.

Предложим теперь еще одно описание диссипативных краевых условий для дифференциального выражения $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$. Этот результат является развитием работы Ф.С.Рофе-Бекетова и А.М.Холькина [4].

Начнем с четного случая: $m = 2n$. Для удобного выражения формы $\mathrm{Im}\,(L_0 y, y)$ нам потребуются квазипроизводные, отвечающие дифференциальному выражению $l_0(y)$. Определим их следующим образом:

$y^{[k]} = y^{(k)},\ (k = 0, 1, \dots, n;\ y^{(0)} = y),$
$y^{[2n-k]} = -\frac{d}{dt} y^{[2n-k-1]},\ (k = 0, 1, \dots, n-1).$

Введем обозначения для векторов младших и старших производных:

$y^\wedge = \big(y(0),\ y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0),\ y(1),\ y'(1), \dots, y^{(n-1)}(1)\big)^{\mathrm{t}},$
$y^\vee = \big(y^{[2n-1]}(0),\ y^{[2n-2]}(0), \dots, y^{[n]}(0),\ -y^{[2n-1]}(1),\ -y^{[2n-2]}(1), \dots, -y^{[n]}(1)\big)^{\mathrm{t}}.$

С помощью этих обозначений $\mathrm{Im}\,(L_0 y, y)$ можно записать так:

$$\mathrm{Im}\,(L_0 y, y) = \frac{1}{2i}\big((L_0 y, y) - (y, L_0 y)\big) = \frac{1}{2i}\big(\langle y^\vee, y^\wedge\rangle_{2n} - \langle y^\wedge, y^\vee\rangle_{2n}\big),$$

где $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{2n}$ по-прежнему означает скалярное произведение в $\mathbb{C}^{2n}$.

Лемма 3. *Если краевые условия задаются в виде*

$$(\mathrm{V} - \mathrm{I}) y^\vee + i(\mathrm{V} + \mathrm{I}) y^\wedge = 0,$$

где I*—единичный, а* V*—нерастягивающий линейный оператор в* $\mathbb{C}^{2n}$*, то есть*

$$\|\,\mathrm{V}\, y\| \leqslant \|y\| \ \ \forall y \in \mathbb{C}^{2n},$$

то оператор, порожденный выражением $l_0(y)$ *и этими краевыми условиями, диссипативен.*

Доказательство. Перепишем краевые условия в виде

$$\mathrm{V}(y^\vee + i y^\wedge) = y^\vee - i y^\wedge,$$

тогда

$$\|y^\vee + i y^\wedge\|^2 \geqslant \|y^\vee - i y^\wedge\|^2.$$

Отсюда

$$2i\big[\langle y^\wedge, y^\vee\rangle_{2n} - \langle y^\vee, y^\wedge\rangle_{2n}\big] \geqslant 0,$$

что совпадает с определением диссипативности оператора.

Лемма 4. *Пусть оператор* L_0 *порожден дифференциальным выражением* $l_0(y)$*, а его область определения* $D(L_0) \subset W_2^{2n}(0,1)$ *задается* $2n$ *линейно независимыми краевыми условиями. Если* L_0 *диссипативен, то существует такой нерастягивающий линейный оператор* V*, действующий в* $\mathbb{C}^{2n}$*, что краевые условия эквивалентны следующим:*

$$(\mathrm{V} - \mathrm{I}) y^\vee + i(\mathrm{V} + \mathrm{I}) y^\wedge = 0,$$

где I *по-прежнему единичный оператор в* $\mathbb{C}^{2n}$*.*

Доказательство. Поскольку оператор L_0 диссипативен, то

$$2i\big[\langle y^\wedge, y^\vee\rangle_{(2n)} - \langle y^\vee, y^\wedge\rangle_{2n}\big] \geqslant 0,$$

что равносильно

$$\|y^\vee + i y^\wedge\|^2 \geqslant \|y^\vee - i y^\wedge\|^2.$$

Определим теперь отображение V.
Область определения $D(\mathrm{V})$ зададим так:

$$D(\mathrm{V}) = \{z \in \mathbb{C}^{2n} |\ z = y^\vee + i y^\wedge,\ y \in D(L_0)\}.$$

Из условия леммы следует что $D(\mathrm{V})$—подпространство в $\mathbb{C}^{2n}$. Положим

$$\mathrm{V}(y^{\vee} + iy^{\wedge}) = y^{\vee} - iy^{\wedge},\ y \in D(L_0).$$

Отображение $\mathrm{V} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ является искомым линейным оператором.

Докажем, что заданное так отображение V однозначно.

Предположим противное: пусть отображение V неоднозначно, то есть найдутся такие $q,\ y \in D(L_0),\ q \neq y,$ что $y^{\vee} + iy^{\wedge} = q^{\vee} + iq^{\wedge},$ и $y^{\vee} - iy^{\wedge} \neq q^{\vee} - iq^{\wedge}$. Тогда, так как $(y - q) \in D(L_0)$, то

$$0 = \|(y-q)^{\vee} + i(y-q)^{\wedge}\| \geqslant \|(y-q)^{\vee} - i(y-q)^{\wedge}\| > 0.$$

Пришли к противоречию с предположением о неоднозначности отображения V.

Таким образом, представлен линейный нерастягивающий оператор V, действующий в $\mathbb{C}^{2n}$, такой, что краевые условия

$$(\mathrm{V} - \mathrm{I})y^{\vee} + i(\mathrm{V} + \mathrm{I})y^{\wedge} = 0$$

задают $D(L_0)$. Доказательство леммы 4 закончено.

Для нечетного случая $(m = 2n-1)$ определение квазипроизводных $y^{[k]}$, отвечающих $l_0(y)$, задается формулами:

$y^{[k]} = y^{(k)},\ (k = 0, 1, \ldots, n-2;\ y^{(0)} = y),$
$y^{[n-1]} = -iy^{(n-1)},$
$y^{[2n-k-1]} = -\frac{d}{dt}y^{[2n-k-2]},\ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$

Обозначим:

$y^{\wedge} = \bigl(y^{(n-1)}(0) + y^{(n-1)}(1),\ y(0),\ y'(0), \ldots, y^{(n-2)}(0),\ y(1),\ y'(1), \ldots, y^{(n-2)}(1)\bigr)^{\mathrm{t}},$
$y^{\vee} = \bigl(iy^{(n-1)}(1) - iy^{(n-1)}(0),\ y^{[2n-2]}(0), \ldots, y^{[n]}(0),\ -y^{[2n-2]}(1), \ldots, -y^{[n]}(1)\bigr)^{\mathrm{t}}.$

Теперь $\mathrm{Im}(L_0 y, y)$ снова можно записать так:

$$\mathrm{Im}\,(L_0 y, y) = \frac{1}{2i}\bigl(\langle y^{\vee}, y^{\wedge}\rangle_{2n-1} - \langle y^{\wedge}, y^{\vee}\rangle_{2n-1}\bigr),$$

где $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{2n-1}$ означает скалярное произведение в $\mathbb{C}^{2n-1}$.

Леммы 3 и 4 верны в нечетном случае. Их совокупность доказывает следующую теорему.

Теорема 2. *Оператор, порожденный* $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ *и краевыми условиями* (2), *является диссипативным тогда и только тогда, когда найдется такой нерастягивающий оператор* V *в* $\mathbb{C}^m$, *что можно переписать эти условия в эквивалентной форме:*

$$(\mathrm{V} - \mathrm{I})y^{\vee} + i(\mathrm{V} + \mathrm{I})y^{\wedge} = 0.$$

2. Определение регулярных краевых условий

Напомним определение регулярности краевых условий (см. [1], [5]). Предварительно краевые условия нужно нормировать. Число k_j $(j = 1, \ldots, m)$ назовем порядком краевого условия $U_j(y) = 0$, если это краевое условие содержит $y^{(k_j)}(0)$ или $y^{(k_j)}(1)$, но не содержит $y^{(\nu)}(0)$ и $y^{(\nu)}(1)$ при $\nu > k_j$. Рассмотрим краевые условия порядка $m-1$, если такие имеются. Заменяя их, если надо, линейными комбинациями, можно добиться того, чтобы число линейно независимых краевых условий порядка $m-1$ было $\leqslant 2$. Остальные краевые условия имеют порядок $\leqslant m-2$; применяя к ним тот же прием, сведем их число к минимуму и т.д.

Описанные операции называются *нормировкой краевых условий*, а полученные в результате краевые условия называются *нормированными*. Из способа их построения следует, что нормированные краевые условия должны иметь вид:

$$U_j(y) \equiv U_{j\,0}(y) + U_{j1}(y) = 0, \tag{6}$$

где

$$U_{j\,0}(y)=\alpha_j y^{(k_j)}(0)+\sum_{s=0}^{k_j-1}\alpha_{j\,s}y^{(s)}(0),\quad U_{j1}(y)=\beta_j y^{(k_j)}(1)+\sum_{s=0}^{k_j-1}\beta_{j\,s}y^{(s)}(1),$$
$$m-1\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_m\geqslant 0,\ k_j>k_{j+2},$$

причем для каждого значения индекса j хотя бы одно из чисел α_j, β_j отлично от 0.

Отметим, что имеется эквивалентное определение нормированных краевых условий (см. [6]).

Определение. Будем говорить, что краевые условия $V_j(y)=0$, $j=1,\ldots,m$, эквивалентные (2), реализуют условия (2) в минимальной форме (или приводят их к минимальной форме), если сумма порядков условий $V_j(y)$ минимальна.

Предложение 1. Краевые условия нормированы тогда и только тогда, когда они приведены к минимальной форме.

Доказательство. Очевидно, из минимальности формы следует нормированность. Действительно, пусть, например, условия $\{U_j(y)=0\}_{j=1}^m$ приведены к минимальной форме, но не нормированы. Это означает, что найдутся два или более условия некоторого порядка k такие, что есть линейная комбинация строк длины два $\sum\limits_j c_j(a_{jk},\ b_{jk})=(0,\ 0)$. Здесь j принимает значения, равные номерам условий порядка k. Но тогда у одного из этих условий порядок можно понизить, а это приводит к противоречию с предположением о минимальности формы $\{U_j(y)=0\}_{j=1}^m$.

Рассмотрим теперь нормированные условия $\{U_j(y)=0\}_{j=1}^m$. Для каждого $k=1,\ldots,m-1$ имеется не более двух краевых условий порядка k. Будем обозначать $j(k)$ меньший из номеров краевых условий порядка k, если условия такого порядка наличествуют. Если для некоторого k найдутся ровно два условия порядка k с номерами $j(k)$ и $j(k)+1$, то, заменяя $U_{j(k)}(y)=0$ и $U_{j(k)+1}(y)=0$ на их линейные комбинации, совершим преобразования, приводящие к таким значениям коэфиициентов: $\alpha_{j(k)}=\beta_{j(k)+1}=0$, $\beta_{j(k)}=\alpha_{j(k)+1}=1$. Вычитая теперь из $U_n(y)=0$ для каждого $n<k(j)$ равенство $\beta_n U_{j(k)}(y)+\alpha_n U_{j(k)+1}(y)=0$, добьемся того, чтобы $y^{(k)}(0)$ и $y^{(k)}(1)$ встречались только в условиях с номерами $j(k)$ и $j(k)+1$. Если же для некоторого k только одно условие имеет порядок k, то, заменяя условия с номерами, меньшими $j(k)$, на линейные комбинации их с условием $U_{j(k)}(y)=0$, исключим либо $y^{(k)}(1)$ (если $\beta_{j(k)}\neq 0$), либо $y^{(k)}(0)$ (если $\beta_{j(k)}=0$) из всех условий кроме $U_{j(k)}(y)=0$. После этих преобразований краевые условия выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\cdots & \cdot & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k_1} & \beta_{k_1} & \cdots\\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \\ & \cdot & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdots & \alpha_k & \beta_k & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0)\\ y(1)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y^{(m-1)}(0)\\ y^{(m-1)}(1)\end{pmatrix}=0$$

Сделанные преобразования не изменили ни суммы порядков, ни нормированность условий.

Теперь очевидно, что при совершении элементарных преобразований строк в полученной матрице сумма порядков не уменьшится, а значит, нормированные условия реализуют минимальную форму.

Из этого предложения очевидным образом получается следующее.

Следствие. *Набор порядков $k_1,\ldots,k_m$ нормированных условий не зависит от того, какими преобразованиями проводилась нормировка.*

Теперь определим класс *регулярных* краевых условий. Обозначим через $\omega_j,\ j = 1, \ldots, m$ различные корни m-й степени из -1 в таком порядке, чтобы выполнялись неравенства

$$\mathrm{Re}(\omega_1 e^{\frac{i\pi}{2m}}) < \mathrm{Re}(\omega_2 e^{\frac{i\pi}{2m}}) < \ldots < \mathrm{Re}(\omega_m e^{\frac{i\pi}{2m}}).$$

Определение дается отдельно для четных и нечетных m.

а) m нечетно; $m = 2\mu - 1$.

Нормированные краевые условия (6) называются регулярными, если оба числа θ_0 и θ_1, определенные равенством

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \ldots & \beta_1\omega_m^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & \beta_2\omega_m^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m\omega_1^{k_m} & \ldots & \alpha_m\omega_{\mu-1}^{k_m} & (\alpha_m + s\beta_m)\omega_\mu^{k_m} & \beta_m\omega_{\mu+1}^{k_m} & \ldots & \beta_m\omega_m^{k_m} \end{vmatrix},$$

отличны от нуля.

б) m четно; $m = 2\mu$.

Нормированные краевые условия (6) называются регулярными, если по крайней мере одно из чисел θ_{-1} и θ_1, определенных равенством

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \ldots & \beta_1\omega_m^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & (\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \ldots & \beta_2\omega_m^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m\omega_1^{k_m} & \ldots & \alpha_m\omega_{\mu-1}^{k_m} & (\alpha_m + s\beta_m)\omega_\mu^{k_m} & (\alpha_m + \frac{1}{s}\beta_m)\omega_{\mu+1}^{k_m} & \beta_m\omega_{\mu+2}^{k_m} & \ldots & \beta_m\omega_m^{k_m} \end{vmatrix}$$

отлично от нуля.

3. Диссипативные краевые условия четного порядка

В этом параграфе мы докажем регулярность оператора четного порядка, порожденного $l_0(y)$ и диссипативными краевыми условиями. Надо упомянуть, что в работе А.М.Минкина [7] доказывается это утверждение, однако представленное ниже рассуждение опирается на утверждение, которое может иметь самостоятельный интерес, а именно на лемму 8.

Будем писать $y_0^{(k)}$ вместо $y^{(k)}(0)$ и $y_1^{(k)}$ вместо $y^{(k)}(1)$.

Центральное в этом параграфе утверждение звучит следующим образом.

Теорема 3. *Диссипативный оператор четного порядка ($m = 2n$) является регулярным.*

Доказательство. Произведем нормировку краевых условий:

$$U_j(y) = b_0^j y_0^{(j)} + b_1^j y_1^{(j)} + \ldots = 0,\ j = 0, \ldots, 2n-1 \tag{7}$$

$U_j(y)$ и b_k^j—векторы-столбцы высоты $r_j \in \{0, 1, 2\}$, $\sum\limits_{j=0}^{2n-1} r_j = 2n,\ k = 1, 2$ (многоточие здесь подразумевает производные младше j). Будем называть $y_k^{(j)}$ неизвестными. Имеем систему линейных уравнений относительно этих неизвестных, которую можем решить, выразив главные неизвестные через свободные. Тогда краевые условия задают однозначное отображение из $\mathbb{C}^{2n}$ в $\mathbb{C}^{2n}$—каждому набору значений свободных неизвестных соответствует единственный набор главных так, что функция, значения которой в 0 и 1 вместе со значениями ее производных до $(2n-1)$–й включительно совпадают с набором значений неизвестных, удовлетворяет краевым условиям.

Лемма 5. *В каждой паре* $(y_k^{(j)}, y_k^{(2n-1-j)})$, $k = 0, 1$ *обе неизвестные не могут быть одновременно свободными, если условия диссипативны и* $r_j \cdot r_{2n-1-j} \neq 1$.

Доказательство. Предполагаем противное. Пусть обе неизвестные в паре $(y_0^{(j)},\, y_0^{(2n-1-j)})$ свободные при некотором j. Запишем форму $\operatorname{Im}(L_0 y, y)$, подставив вместо главных неизвестных их выражения через свободные:

$$\operatorname{Im}(L_0 y, y) = (-1)^{n+j+1} \cdot \operatorname{Im}(y_0^{(j)} \overline{y_0^{(2n-j-1)}}) + \eta |y_0^{(\min\{j, 2n-j-1\})}|^2 + \\ + \alpha y_0^{(2n-1-j)} + \beta \overline{y_0^{(2n-1-j)}} + \gamma y_0^{(j)} + \delta \overline{y_0^{(j)}} + \varepsilon,$$

где $\alpha \ldots \varepsilon$—линейные комбинации свободных переменных за исключением рассматриваемой пары; η—число.

Рассмотрим функции $y \in D(L_0)$, у которых значения производных, соответствующих свободным переменным, за исключением $y_0^{(j)}$ и $y_0^{(2n-1-j)}$ равны нулю. Форма $\operatorname{Im}(L_0 y, y)$ на таких функциях принимает значения

$$\operatorname{Im}(L_0 y, y) = (-1)^{n+j+1} \cdot \operatorname{Im}(y_0^{(j)} \overline{y_0^{(2n-j-1)}}) + \eta |y_0^{(\min\{j, 2n-j-1\})}|^2$$

и не является знакоопределенной. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть краевые условия диссипативны, тогда*

$$r_j + r_{2n-1-j} = 2 \quad \forall j \in \{0, \ldots, 2n-1\}. \tag{8}$$

Доказательство. Действительно, если $r_j + r_{2n-1-j} < 2$ для некоторого j ($r_j = 0$, $r_{2n-1-j} = 0$ или 1), то, очевидно, есть пара свободных неизвестных $(y_k^{(j)},\, y_k^{(2n-1-j)})$ при $k = 0$ или 1. И в силу леммы 5, для диссипативных краевых условий не может выполняться $r_j + r_{2n-1-j} < 2$ ни при каком j.

Если же $r_j + r_{2n-1-j} > 2$ при некотором j и $\sum\limits_{l=0}^{2n-1} r_l = 2n$, то найдется такое s, что $r_s + r_{2n-1-s} < 2$, а этого быть не может в силу сказанного выше. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть заданы диссипативные краевые условия и нашлось такое j, что $r_j = r_{2n-1-j}$, тогда*

$$b_0^j \overline{b_0^{2n-1-j}} = b_1^j \overline{b_1^{2n-1-j}}. \tag{9}$$

Доказательство. Сперва предположим, что среди этой четверки чисел нет нулей. Тогда рассмотрим неизвестные $y_1^{(j)}$ и $y_1^{(2n-1-j)}$ как свободные. Как и в доказательстве леммы 5 положим значения всех свободных неизвестных за исключением этой пары равными нулю. Тогда

$$\operatorname{Im}(Ly, y) = (-1)^{n+j} \cdot \operatorname{Im}\left(y_1^{(j)} \overline{y_1^{(2n-j-1)}} \left[1 - \frac{b_0^j}{b_1^j} \overline{\left(\frac{b_0^{(2n-j-1)}}{b_1^{(2n-j-1)}} \right)} \right] \right) + \mu |y_1^{(\min\{j, 2n-j-1\})}|^2,$$

где μ—некоторое число. Отсюда получаем требуемое.

Рассмотрим оставшийся вариант: пусть $b_0^j = 0$, $b_1^j \neq 0$. Для знакоопределенности $\operatorname{Im}(L_0 y, y)$ на функциях y, у которых значения всех производных, соответствующих свободным неизвестным, отличным от выбранной четверки, нулевые, необходимо выполнение условий $b_1^{2n-1-j} = 0$, $b_0^{2n-1-j} \neq 0$.

Лемма 8. *Пусть даны диссипативные нормированные краевые условия*

$$U_j(y) = b_0^j y^{(k_j)}(0) + b_1^j y^{(k_j)}(1) + \ldots = 0, \; j = 0, \ldots, 2n-1,$$

тогда краевые условия, получаемые отбрасыванием младших производных

$$U_j^{(sa)}(y) = b_0^j y^{(k_j)}(0) + b_1^j y^{(k_j)}(1) = 0, \; j = 0, \ldots, 2n-1,$$

являются самосопряженными.

Доказательство. Это простое следствие лемм 5, 6, 7

Поскольку в определении регулярности краевых условий участвуют только коэффициенты при значениях старших производных, то диссипативные условия $\{U_j(y) = 0\}_{j=1}^{2n}$ и полученные по ним самосопряженные $\{U_j^{(sa)}(y) = 0\}_{j=1}^{2n}$ регулярны одновременно. В этом месте сошлемся на работу S.Salaff [2], в которой установлена регулярность самосопряженных дифференциальных операторов четного порядка. Доказательство теоремы закончено.

4. Диссипативные краевые условия нечетного порядка.

Диссипативные операторы могут не являться регулярными. Для доказательства этого приведем следующий пример.

Пример.

$$l(y) = (-i)^{2n-1}y^{(2n-1)} = (-1)^n iy^{(2n-1)}$$

Краевые условия возьмем такими:

$$y_0^{(2n-2)} = y_1^{(2n-2)} = \ldots = y_0^{(n)} = y_1^{(n)} = y_1^{(n-1)} = 0$$

При заданных краевых условиях $\mathrm{Im}\,(L_0 y, y) = \frac{1}{2}|y_0^{(n-1)}|^2$.

Элементарная проверка показывает, что число θ_0, участвующее в определении регулярности, равно нулю. Поэтому регулярными такие краевые условия не являются.

Автор благодарит А. А. Шкаликова за постановку задач, обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

[1] G. Birkhoff. *Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations*// T.A.S., 1908, oct, p.373-395.

[2] S. Salaff. *Regular boundary conditions for ordinary differential operators*// T.A.S., 1968, nov, p.355-373.

[3] А. М. Минкин. *Регулярность самосопряженных краевых условий*// Мат.заметки, т.22, № 6 (1977), стр.335-346.

[4] Ф. С. Рофе-Бекетов, А.М.Холькин. *Спектральный анализ дифференциальных операторов*// Мариуполь, 2001.

[5] М. А. Наймарк. *Линейные дифференцальные операторы*// М., Наука, 1969.

[6] А. А. Шкаликов. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*// Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, стр.190-229.

[7] A. M. Minkin. *Regularity of dissipative operators*// arXiv:math.SP/9909092.

Ширяев Е. А., мехмат МГУ, г.Москва, 119234, Россия

E-mail: `506@rambler.ru`

KZK EQUATION

Claude Bardos
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris VII
Paris, France,
Anna Rozanova
Russian Peoples' Freindship University
Moscow, Russia

We consider the Khokhvov-Zabolotskaya-Kuznetzov (KZK) equation $(u_t-uu_x-\beta u_{xx})_x-\gamma\Delta_y u=0$ *in Sobolev spaces of functions periodic on* x *and with mean value zero. The derivation of KZK from the non linear isentropic Navier Stokes equations and approximation their solutions, the results of the existence, uniqueness, stability and blow-up of solution of KZK equation are obtained.*

Рассматривается уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова (KZK) $(u_t-uu_x-\beta u_{xx})_x-\gamma\Delta_y u=0$ *в пространствах Соболева для периодических по* x *функций с нулевым средним по периоду значением. Приводятся вывод уравнения KZK из нелинейной изентропной системы Навье-Стокса и аппроксимация их решений, а также получены результаты существования, единственности, устойчивости и blow-up для решения уравнения KZK.*

1. Derivation of the KZK equation for an isentropic thermoellastic media

The KZK equation is due for its name to Russian physicists Khokhlov, Zabolotskaya and Kuznetzov who had introduced this equation for needs of non linear acoustic [1]. The KZK equation is devised to produce a large time description of quasi traveling waves in the large variety of phenomenas. The KZK like equation was considered in [2] for long waves in ferromagnetic media based on the Landau-Lifschitz-Maxwell equation.

The issue is the description of the quasi one d propagation of a signal in an homogenous but non linear isotropic media. For a description of such a wave one assume that it propagates in the x_1 direction and that it is concentrated along the x_1 axis therefore it is assumed that its variation in the direction

$$x'=(x_2,x_3,\dots x_n)$$

perpendicular to the x_1 axis is much larger than its variation along the axis x_1. One starts from a Navier Stokes system:

$$\partial_t\rho+\nabla(\rho u)=0\,,\quad \rho[\partial_t u+(u,\nabla)\,u]=-\nabla p(\rho)+b\Delta u\,. \tag{1}$$

Next one assumes that the fluctuation of density (around the constant state ρ_0) of velocity (around u_0), which can be taken equal to zero with galilean invariance of density and viscosity, are of the same order ϵ:

$$\rho_\epsilon=\rho_0+\epsilon\tilde\rho_\epsilon\,,\quad u_\epsilon=\epsilon\tilde u_\epsilon\,,\quad b=\epsilon\nu,$$

ϵ is a dimensionless parameter which characterizes the smallness of the perturbation. For instance in water with a initial power of the order of $0,3\quad Vt/cm^2$ $\epsilon=10^{-5}$.

Next one introduce the direction of propagation of the beam say along the axis x_1, and therefore introduce the following profiles:

$$\tilde\rho_\epsilon=I(t-\frac{x_1}{c},\epsilon x_1,\sqrt{\epsilon}x')\,, \tag{2}$$

$$\tilde u_\epsilon=(u_{\epsilon,1},u'_\epsilon)=(v(t-\frac{x_1}{c},\epsilon x_1,\sqrt{\epsilon}x'),\sqrt{\epsilon}\vec w(t-\frac{x_1}{c},\epsilon x_1,\sqrt{\epsilon}x'))\,. \tag{3}$$

In (2) and (3) the argument of the functions will be denoted by $(\tau\,,z\,,y)$ and c is taken equal to the sound speed $c=\sqrt{p'(\rho_0)}$. The approximate state equation

$$p=p(\rho_\epsilon)=c^2\epsilon\tilde{\rho}_\epsilon+\frac{(\gamma-1)c^2}{2\rho_0}\epsilon^2\tilde{\rho}_\epsilon^2+O(\epsilon^3)$$

had been found in [1]. Inserting the functions $\rho_\epsilon=\rho_0+\epsilon I$, u_ϵ in the system (1) one obtains:

1 For the conservation of mass:

$$\begin{aligned}\partial_t\rho_\epsilon &+ \nabla(\rho_\epsilon u_\epsilon)=\epsilon(\partial_\tau I-\frac{\rho_0}{c}\partial_\tau v)\\ &+ \epsilon^2\left(\rho_0(\partial_z v+\nabla_y\cdot\vec{w})-\frac{1}{c}v\partial_\tau I-\frac{1}{c}I\partial_\tau v\right)+O(\epsilon^3)=0\,.\end{aligned}\tag{4}$$

2 For the conservation of momentum in the x_1 direction:

$$\begin{aligned}\rho_\epsilon\epsilon(\partial_t u_{\epsilon,1} &+ u_\epsilon\nabla u_{\epsilon,1})+\partial_{x_1}p(\rho_\epsilon)-\epsilon^2\nu\Delta u_{\epsilon,1}=\epsilon(\rho_0\partial_\tau v-c\partial_\tau I)+\\ &+ \epsilon^2\left(I\partial_\tau v-\frac{\rho_0}{c}v\partial_\tau v+c^2\partial_z I-\frac{(\gamma-1)}{2\rho_0}c\partial_\tau I^2-\frac{\nu}{c^2}\partial_\tau^2 v\right)+O(\epsilon^3)=0.\end{aligned}\tag{5}$$

And finally for the orthogonal (to the axis x_1) component of the momentum one has:

$$\begin{aligned}\rho_\epsilon\epsilon(\partial_t u'_\epsilon &+ u_\epsilon\nabla u'_\epsilon)+\partial_{x'}p(\rho_\epsilon)-\epsilon^2\nu\Delta u'_\epsilon=\epsilon^{\frac{3}{2}}(\rho_0\partial_\tau\vec{w}+c^2\nabla_y I)+\\ &+\epsilon^{\frac{5}{2}}(-\frac{\rho_0 v}{c}\partial_\tau\vec{w}+I\partial_\tau\vec{w}+\frac{(\gamma-1)c^2}{2\rho_0}\nabla_y I^2-\frac{\nu}{c^2}\Delta_y\vec{w})+O(\epsilon^3)=0.\end{aligned}\tag{6}$$

At this point one obtain the relation:

$$\epsilon(\partial_\tau I-\frac{\rho_0}{c}\partial_\tau v)=-\epsilon\frac{1}{c}(\rho_0\partial_\tau v-c\partial_\tau I)\tag{7}$$

and therefore I and v should be related by the formula:

$$v=\frac{c}{\rho_0}I\tag{8}$$

and the second order terms of (4) and (5) by the formula:

$$\begin{aligned}\rho_0(\partial_z v+\nabla_y\cdot\vec{w}) &- \frac{1}{c}v\partial_\tau I-\frac{1}{c}I\partial_\tau v=\\ &= -\frac{1}{c}(I\partial_\tau v-\frac{\rho_0}{c}v\partial_\tau v+c^2\partial_z I-\frac{(\gamma-1)}{2\rho_0}c\partial_\tau I^2-\frac{\nu}{c^2}\partial_\tau^2 v)\end{aligned}\tag{9}$$

which (with (8)) gives:

$$\rho_0\nabla_y\cdot\vec{w}+2c\partial_z I-\frac{(\gamma+1)}{2\rho_0}\partial_\tau I^2-\frac{\nu}{c^2\rho_0}\partial_\tau^2 I=0.\tag{10}$$

Eventually one uses the equation for the orthogonal moment to eliminate the term $\rho_0\nabla\cdot\vec{w}$. Assume in agreement with (6) that

$$\rho_0\partial_\tau\vec{w}+c^2\nabla_y I=0\tag{11}$$

take the divergence with respect to y of this equation. Differentiate (10) with respect to τ, and combine to obtain:

$$c\partial_{\tau z}^2 I-\frac{(\gamma+1)}{4\rho_0}\partial_\tau^2 I^2-\frac{\nu}{2c^2\rho_0}\partial_\tau^3 I-\frac{c^2}{2}\Delta_y I=0.\tag{12}$$

The above derivation is standard in physic articles however it does not implies that the function

$$\rho_\epsilon=\rho_0+\epsilon I,u_\epsilon=\epsilon(v,\sqrt{\epsilon}\vec{w})$$

is a solution of the system (1) with an error term of order ϵ^3. In fact one can assume that (7) is zero and (11) with (10) take place, but not the fact that this quantity which corresponds to the term of order ϵ^2 both in the conservation of mass and momentum along the axis x_1 is zero. To remedy to this fact and also to ensure an error of order ϵ^3 in the moment orthogonal to the x_1 direction one introduce an Hilbert type construction and write

$$\rho_\epsilon = \rho_0 + \epsilon I_\epsilon\,, \quad u_\epsilon = \epsilon(v + \epsilon v_1, \sqrt{\epsilon}(\vec{w} + \epsilon\vec{w}_1)).$$

At this point one state a theorem all details of which will in the full publication of this work.

Theorem 1. *Let I be a smooth non trivial solution of the KZK equation (12) which as a function of (τ, z, y) is periodic in τ of period L and $\int_0^L I(\tau, z, y)d\tau = 0$. Then one constructs according to the formulas (8) and (11) the functions v, $\vec{w}$ and the correctors v_1 and $\vec{w}_1$ by the relations:*

$$\partial_\tau v_1 = \frac{\nu}{c\rho_0^2}\partial_\tau^2 I + \frac{(\gamma-1)}{2\rho_0^2}c\partial_\tau I^2 - \frac{c^2}{\rho_0}\partial_z I, \tag{13}$$

$$\partial_\tau \vec{w}_1 = -\frac{(\gamma-1)}{2\rho_0^2}c^2\nabla_y I^2 - \frac{\nu}{\rho_0^2}\Delta_y I. \tag{14}$$

Define the function $(\rho_\epsilon, u_\epsilon)$ by the formula:

$$(\rho_\epsilon, u_\epsilon)(x_1, x', t) = (\rho_0 + \epsilon I, \epsilon(v + \epsilon v_1, \sqrt{\epsilon}(\vec{w} + \epsilon\vec{w}_1))(t - \frac{x_1}{c}, \epsilon x_1, \sqrt{\epsilon}x').$$

Then for any finite time T and ϵ small enough there exists a solution $(R_\epsilon, U_\epsilon)(x, t)$ of the isentropic Navier Stokes equation such that one has:

$$\|\rho_\epsilon - R_\epsilon\|_{L_2} + \|u_\epsilon - U_\epsilon\|_{L_2} \le C\epsilon^3.$$

Remark 14. Several limits of the equation (12) leads to classical pde.

- With $\rho_0 c \to \infty$ it becomes the paraxial approximation:

$$\partial_{\tau z}^2 I - \frac{c}{2}\Delta_y I = 0.$$

- And when I does not depends on y it is the Burgers Hopf equation

$$c\partial_z I - \frac{(\gamma+1)}{4\rho_0}\partial_\tau I^2 - \frac{\nu}{2c^2\rho_0}\partial_\tau^2 I = 0$$

and eventually in this case with $\nu = 0$ the Burgers equation:

$$c\partial_z I - \frac{(\gamma+1)}{4\rho_0}\partial_\tau I^2 = 0.$$

- The analogous $2d$ version is

$$c\partial_{\tau z}^2 I - \frac{(\gamma+1)}{4\rho_0}\partial_\tau^2 I^2 - \frac{\nu}{2c^2\rho_0}\partial_\tau^3 I - \frac{c^2}{2}\partial_y^2 I = 0.$$

And for a “beam"(rotationally invariant around the x_1 axis) in 3 space variables it is:

$$c\partial_{\tau z}^2 I - \frac{(\gamma+1)}{4\rho_0}\partial_\tau^2 I^2 - \frac{\nu}{2c^2\rho_0}\partial_\tau^3 I - \frac{c^2}{2}(\partial_r^2 I + \frac{1}{r}\partial_r I) = 0. \tag{15}$$

2. Existence uniqueness and stability of solutions of the KZK equation

Following the mathematical tradition in this section the unknown will be denoted by u, and the variables $(x, y) \in \mathbb{R}_x^+ \times (\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1})$. When $\Omega \neq \mathbb{R}^{n-1}$ it is assumes that the solution satisfies on its boundary the Neumann boundary condition. Multiplying u by a positive scalar one reduces the problem to an equation involving only two constants β and γ

$$(u_t - uu_x - \beta u_{xx})_x - \gamma \Delta_y u = 0 \quad \text{ in } \mathbb{R}_x \times \Omega. \tag{16}$$

For sake of clarity and also because this corresponds to practical situations we consider solution which are periodic with respect to the variable x and which are mean value zero:

$$u(x+L, t) = u(x, t) \qquad \int_0^L u(x, t)dx = 0. \tag{17}$$

Observe that the conditions (17) are compatible with the flow and than the second one is "natural" because we consider fluctuations.

We define the inverse of the derivative ∂_x^{-1} as an operator acting in the space of periodic functions with mean value zero this gives in space and in Fourier representation the formulas:

$$\partial_x^{-1} f = \int_0^x f(s)ds - \int_0^L \frac{L-s}{L} f(s)ds,$$

$$\widehat{\partial_x^{-1} f} = \sum_{k\neq 0} \frac{f(k)}{2\pi i \frac{k}{L}} e^{2i\pi \frac{kx}{L}}.$$

In this situation the equation (16) is equivalent to the equation

$$u_t - uu_x - \beta u_{xx} - \partial_x^{-1} \gamma \Delta_y u = 0 \quad \text{ in } \mathbb{R}_x \times \Omega. \tag{18}$$

According to the standard approach first we establish a priori estimate for smooth solutions which are in particular consequence of the relation:

$$\int_0^L \int_{\mathbb{R}_y^{n-1}} \partial_x^{-1}(\Delta_y u) u dxdy = -\int_0^L \int_{\mathbb{R}_y^{n-1}} \partial_x^{-1}(\nabla_y u) \nabla_y u dxdy$$
$$= \int_0^L \int_{\mathbb{R}_y^{n-1}} \partial_x^{-1}(\nabla_y u) \partial_x(\partial_x^{-1}(\nabla_y u)) dxdy = 0\,.$$

The H^s norm in $(\mathbb{R}_x^+/(L\mathbb{Z})) \times \mathbb{R}_y^{n-1})$ is denoted by $\|u\|_s$.

Lemma 1. *The following estimates are valid for solutions of the integrated KZK equation (18):*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L_2}^2 + \beta \int_0^L \int_{\mathbb{R}_y^{n-1}} |\partial_x u(x, y, t)|^2 dxdy = 0\,, \tag{19}$$

$$\textit{For } s > [\frac{n}{2}] + 1 \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 + \beta \|\partial_x u\|_s^2 \leq C(s)\|u\|_s^3 \tag{20}$$

$$\textit{and } \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 + \beta C(L)\|u\|_s^2 \leq C(s)\|u\|_s^3. \tag{21}$$

To obtain the relation (19) multiply (18) by u, and integrate by part. To prove (20) we use the technic demonstrated in [3] and [4] for periodic and non periodic cases. The relation (21) holds only in the periodic case and not on the whole line. (In this later case the H^s norm of $\partial_x u$ does not control the H^s norm of u.)

The following theorem is an easy consequence of the a priori estimates and the works [5, 6], which use the theory of Kato [7, 8].

Theorem 2. *For the following Cauchy problem*

$$u_t - uu_x - \beta u_{xx} - \gamma \partial_x^{-1}(\Delta_y u) = 0\,, u(x,y,0) = u_0 \tag{22}$$

considered in $(\mathbb{R}_x/(L\mathbb{Z})) \times \mathbb{R}_y^{n-1}$ *ie in the class of* x *periodic solutions with mean value* 0 *with the operators* ∂_x^{-1} *defined by the formula*

$$\partial_x^{-1} g = \int_0^x g(s,y)ds + \frac{1}{L}\int_0^L sg(s,y)ds \tag{23}$$

and finally with $\beta \geq 0$ *one has the following results.*

1 For $s > [\frac{n}{2}] + 1$ *there exists a constant* $C(s,L)$ *such that for any initial data* $u_0 \in H^s$ *the problem (22) has on an interval* $]0,T[$ *with*

$$T \leq \frac{1}{C(s,L)\|u_0\|_s}$$

a solution in $C(]0,T[;H^s)$.

2 Let T^* *be the biggest time on which such solution is defined then one has*

$$\int_0^{T^*} \sup_{x,y}(|\partial_x u(x,y,t)| + |\nabla_y u(x,y,t)|)dt = \infty.$$

3 If $\beta > 0$ *there exists a constant* C_1 *such that*

$$\|u_0\|_s \leq C_1 \Rightarrow T^* = \infty.$$

4 For two solutions u *and* v *belonging to* H^s *one has the following stability uniqueness result:*

$$|u(.,t) - v(.,t)|_{L^2} \leq e^{\int_0^t sup_{x,y}(|\partial_x u(x,y,s)| + |\partial_x v(x,y,s)|)ds} |u(.,0) - v(.,0)|_{L^2}.$$

Remark 15. When there is no viscosity $\nu = 0$ all the corresponding statement of the theorem 2 are valid mutatis mutandis for $0 > t > -C$ with a convenient C.

3. Blow up and singularities

The first remark is that for $\nu = 0$ and for function independent of y the KZK equation

$$(u_t - uu_x - \beta u_{xx})_x - \gamma \Delta_y u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_x \times \Omega$$

becomes which is known to exhibit singularities. On the other hand the derivation of the previous section shows that any solution of the KZK equation has in its neighborhood a solution of the insentropic Euler equation. Once again it is known that such solution even with smooth initial data may exhibit singularities (cf. [9] or [10]).

For technical simplifications let $u_0|_{x=0} = 0$.

Let the function $\partial_x u_0$ has on $[-A_0, 0] \times [r_0, r_1]$ $(r_0 > 0)$ a unique positif maximum in the point $m_0 = (x_0, y_0)$, $-A_0 < x_0 < 0$, such that

$$\partial_x u_0(m_0) > 0, \quad \nabla_{x,y}(\partial_x u_0)(m_0) = 0, \quad \nabla^2_{x,y}(\partial_x u_0)(m_0) << 0.$$

For a $\bar{T} > 0$, which is the blow up time and is unknown, and a function $A_0(y,t) > 0$ to be precise (with $A_0(y,0) = A_0$), we have in the domain

$$D = \{(x,y,t) | x \in [-A_0(y,t), 0], \quad y \in [r_0, r_1], \quad r_0 > 0, \quad t \in [0, \bar{T}[\}$$

a free boundary problem.

The KZK equation with $\beta = 0$, in D with Neuman boundary condition on y, of forme as in (15), with $u_1 = u$, $u_2 = \partial_x^{-1}\partial_y u$ can be written as

$$\partial_t u_1 - u_1\partial_x u_1 - \frac{\gamma}{y}u_2 - \gamma\partial_y u_2 = 0, \quad \partial_x u_2 - \partial_y u_1 = 0, \tag{24}$$

$$u_1|_{t=0} = u_0(x,y), \quad u_2|_{t=0} = \partial_x^{-1}\partial_y u_0(x,y), \quad u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0} = 0. \tag{25}$$

Here, γ is positif and small.

For $\gamma = 0$, the problem (24)-(25) reduces to the Burgers equation in (x, y, t) variables (y is a parameter) with the same initial data u_0.

Finally one proves the following result:

Theorem 3. *For $\gamma > 0$ rather small,*

(1) *There exists functions $\bar{T}_\gamma > 0$ and $A_0(y,t) = A_{0,\gamma}(y,t), t < \bar{T}_\gamma$, defining a domain $D = D_\gamma$,*

(2) *There exists a point $\tilde{M}_\gamma = (\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_\gamma, \bar{T}_\gamma) \in \bar{D}$ near of the blowup point of Burgers equation $\tilde{M}_0 = (x_0 - \bar{T}_0 u_0(x_0,y_0), y_0, \bar{T}_0)$,*

(3) *There exists a function $u = u_\gamma \in C^\infty(\bar{D} - \{\tilde{M}_\gamma\})$, which is solution of the problem for KZK equation with $\beta = 0$ and with Neuman boundary conditions. Also there exists a constant $C > 0$ such that $(C(\bar{T}_\gamma - t))^{-1} \le \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L_\infty} \le C(\bar{T}_\gamma - t)^{-1}$.*

The result follows from the theory of blow-up systems developed by Alinhac [11, 12, 13].

References

[1] *N.S. Bakhvalov, Ya. M. Zhileikin and E.A. Zabolotskaya* Nonlinear Theory of Sound Beams, American Institute of Physics, New York, 1987 (Nelineinaya teoriya zvukovih puchkov, Moscow "Nauka", 1982).

[2] *D.Sanchez* Long waves in ferromagnetic media, Zabolotskaya-Khokhlov equation. J. Differential Equations 210, 263-289 (2005).

[3] *T.Kato, G.Ponce* Commutator Estimates and the Euler and Navier-Stokes Equations. Comm. Pure Appl. Math. 891-907 (1988).

[4] *J.C. Saut, Temam* Remarks on the Korteweg-de Vries equation, Israel Journal of Mathematics, Vol. 24, No 1, 1976.

[5] *P.Isaza, J. Mejia, V.Stallbohm* Local solution for the Kadomtsev-Petviashvili equation in $\mathbb{R}^2$. J. of mathematical Analysis and Applications 196, 566-587 (1995).

[6] *P.Isaza, J. Mejia, V.Stallbohm* Local solution for the Kadomtsev-Petviashvili equation with periodic conditions. Manuscripta Math. 75, 383-393 (1992).

[7] *T. Kato* Quasilinear Equations of Evolution, with Applications to partial differential equations, in "Lecture Notes in Mathematics No. 448,"pp. 27-50, Springer-Verlag, Berlin/ New York, 1975.

[8] *T. Kato* On the Korteweg-de Vries equation, Manuscripta Math. 28, 89-99(1979).

[9] *Dafermos C.* Hyperbolic Conservation Laws. Continuum Physics, Springer-Verlag, 2000, Vol. 325.

[10] *Sideris* Formation of Singularities in Three-dimensional compressible fluids. Comm. Math. Phys. 101 (1985), 475-485.

[11] *Alinhac S.* Explosion des solutions d'une équation d'ondes quasi-linéaire en deux dimensions d'espace. Comm. PDE 21 (5,6), 1996, 923-969.

[12] *Alinhac S.* A minicourse on global existence and blowup of classical solutions to multidimensional quasilinear wave equations. Journées Équations aux dérivées partielles, Forges-les-Eaux, 3-7 juin 2002.

[13] *Alinhac S.* Blowup for nonlinear hyperbolic equations, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, 1995.

Bardos C., professor, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France; Rozanova A.V., phd-student, Russian Peoples' Friendship University, Moscow, 117198, Mikluho-Maklaya st., 6, Russia

E-mail: bardos@math.jussieu.fr, rozanova@ann.jussieu.fr

RIESZ BASIS PROPERTY OF THE SEAF FOR A DIRAC TYPE OPERATOR WITH SPLITTING λ-DEPENDING BOUNDARY CONDITIONS

S. Hassi
Vaasa Univercity
Vaasa, Finland,
L.L. Oridoroga
Donetsk National Univercity
Donetsk, Ukraine

Riesz basis property of the system of eigenfunctions and associated functions is established for a first-order system of integro-differential equations with splitting boundary conditions depending nonlinearly on an eigenvalue parameter.

1. It is well known [6] that the system of eigenfunctions and associated functions (SEAF) of the Sturm-Liouville problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0, \tag{2}$$

is complete in $L_2[0,1]$ for arbitrary complex valued potential $q \in L_1[0,1]$ and $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. A similar result is also known for arbitrary nondegenerate boundary conditions (see [6]).

A completeness result for a boundary value problem of arbitrary order differential equations of the form

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} q_j(x)y = \lambda^n y, \tag{3}$$

and subject to splitting boundary conditions, has been announced by M.V. Keldysh [3] and it was first proved by A.A. Shkalikov [8].

In [5] M.M. Malamud and one of the authors have generalized the above mentioned results from [6] to the case of first order systems with arbitrary boundary conditions (not depending on a spectral parameter). Namely, sufficient conditions for the completeness of the SEAF were obtained for the system of ordinary integro-differential equations of the form

$$\frac{1}{i}By' + Q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)\,dt = \lambda y, \tag{4}$$

where

$$Q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x,t) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

with $q_j \in L_\infty[0,1]$ and $M_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $\Omega = \{0 \le t \le x \le 1\}$, $i, j = 1, 2$, see [5].

In [10] and [11] the completeness results for the problem (1), (2) have been generalized to the case of nonlinear λ-depending boundary conditions. Moreover, in [7] analogous results were obtained for a system with a pair of splitting λ-depending boundary conditions.

In [2] analogous results were announced for the system (4) with a pair of λ-depending boundary conditions. In particular, the following theorem was proved in [2].

Theorem 1. *Let P_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, be polynomials, let the rank of the matrix polynomial*

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & P_{13}(\lambda) & P_{14}(\lambda) \\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) & P_{23}(\lambda) & P_{24}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{5}$$

be equal to 2 for all $\lambda \in \mathbb{C}$, and let

$$\deg J_{14} = \deg J_{32} \ge \max\{\deg J_{13}, \deg J_{42}, M\}, \tag{6}$$

where $M = \max\{\deg P_{ij}:\ i \in \{1,2\};\ j \in \{1,2,3,4\}\}$ *and*

$$J_{ij} = \det \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{1j} \\ P_{2i} & P_{2j} \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,2,3,4. \tag{7}$$

Then the SEAF of the problem (4) *with the boundary conditions*

$$\begin{cases} P_{11}(\lambda)y_1(0) + P_{12}(\lambda)y_2(0) + P_{13}(\lambda)y_1(1) + P_{14}(\lambda)y_2(1) = 0 \\ P_{21}(\lambda)y_1(0) + P_{22}(\lambda)y_2(0) + P_{23}(\lambda)y_1(1) + P_{24}(\lambda)y_2(1) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

is complete in $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Moreover, let the set Φ, *which consists of* $N := \deg J_{14} - M$ *eigenfunctions and associate functions, satisfy the following condition:*

If Φ *contains either an eigenfunction or an associate function corresponding to an eigenvalue* λ_k, *then it also contains all the associate functions of higher order corresponding to the same eigenvalue.*

Then the SEAF of the problem (4), (5) *without the set* Φ *is also complete in the space* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

2. Recently, the Riesz basis property of the SEAF for a first-order system of the form (4) was proved in [12], [13] with splitting boundary conditions, not depending on a spectral parameter. In the present paper a similar result is established for the system (4) with splitting λ-depending boundary conditions. The corresponding result in [12], [13] is obtained here as a consequence of Theorem 3, see Corollary 1.

Recall the following basic facts concerning Riesz basis in separable Hilbert spaces, see e.g. [1].

Definition 1. A system of vectors ψ_n is said to be a Riesz basis of the Hilbert space H if there exists a bounded operator A in H with bounded inverse, such that the system $A\psi_n$ is an orthonormal basis of H.

Lemma 1. *Let the system of vectors* ψ_n *be complete in the Hilbert space* H. *If there exists a Riesz basis* ϕ_n *of* H *such that* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \phi_n\|^2 < \infty$, *then the system* ψ_n *is also a Riesz basis of* H.

The following lemma concerns the spectrum of the system (4) with splitting λ-depending boundary conditions determined by the polynomials P_{ij}, $i,j = 1,2$. It is assumed that $P_{11}(\lambda)$ and $P_{12}(\lambda)$ are relatively and that $P_{21}(\lambda)$ and $P_{22}(\lambda)$ are relatively prime and, moreover, that

$$\deg P_{11} = \deg P_{12} = N_0, \quad \deg P_{21} = \deg P_{22} = N_1. \tag{9}$$

The leading coefficient of the polynomial $P_{ij}(\lambda)$ is denoted by C_{ij}, $i,j = 1,2$.

Lemma 2. *Let the function Q(x) be differentiable and let the polynomials* $P_{ij}(\lambda)$ *be as above, cf.* (9), *and assume that the set* Λ *contains* $N = N_0 + N_1$ *eigenvalues of the problem* (4) *with splitting* λ*-depending boundary conditions of the form*

$$\begin{cases} P_{11}(\lambda)y_1(0) + P_{12}(\lambda)y_2(0) = 0 \\ P_{21}(\lambda)y_1(1) + P_{21}(\lambda)y_2(1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Then it is possible to enumerate the other eigenvalues of the system, such that

$$\lambda_n = \frac{i\ln(C_{11}C_{21}/C_{12}C_{22}) + 2\pi n}{b-a} + O\left(\frac{1}{|n|}\right), \qquad \text{where } n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Theorem 2. *Let the function Q(x) be differentiable and let the polynomials* $P_{ij}(\lambda)$ *be as above, cf.* (9). *Moreover, let* Φ *be a set which consists of* $N = N_0 + N_1$ *eigenfunctions and associate functions, and assume that the SEAF of the problem* (4), (10) *without the set* Φ *is complete in* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Then the SEAF of the problem (4), (10) *without the set* Φ *is a Riesz basis in the space* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Combining Theorem 2 with Theorem 1 yields the following result.

Theorem 3. *Let the function Q(x) be differentiable, let* $P_{11} \neq 0$ *and* $P_{12} \neq 0$ *be constant, i.e.* $\deg P_{11} = \deg P_{12} = 0$*, and let the polynomials* $P_{21}(\lambda)$ *and* $P_{22}(\lambda)$ *be relatively prime with* $\deg P_{21} = \deg P_{22} = N$.

Moreover, let the set Φ*, which consists of* N *eigenfunctions and associate functions, satisfy the following condition:*

If Φ *contains either an eigenfunction or an associate function corresponding to an eigenvalue* λ_k*, then it also contains all the associate functions of higher order corresponding to the same eigenvalue.*

Then the SEAF of the problem (4), (10) *without the set* Φ *is a Riesz basis in the space* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Доказательство. It follows from Theorem 1 that the SEAF of the problem (4), (10) without the set Φ is complete in $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$. Therefore, by Theorem 2 it forms a Riesz basis of $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$. $\square$

Theorem 3 can be derived from a general result of Shkalikov [9]. However we present another proof which is simple and based on stability property of Riezs basises.

By taking $N = 0$ in Theorem 3 gives the following result for the system (4) with boundary conditions not depending on a spectral parameter, cf. [12], [13].

Corollary 1. *Let the function Q(x) be differentiable and let* h_1 *and* h_2 *be nonzero constants. Then the SEAF of the problem* (4) *with the boundary conditions*

$$\begin{cases} y_1(0) + h_1 y_2(0) = 0 \\ y_1(1) + h_2 y_2(1) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

is a Riesz basis of $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

The second author was supported by the Academy of Finland (project 203226).

References

[1] *Gohberg, I.C., Kreĭn, M.G.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfajoint Operators in Hilbert Space. Nauka, Moscow — 1965 — 448 pp.

[2] *Hassi, S., Oridoroga, L.L.* Completeness theorems for Dirac-type operators with boundary conditions of general form depending on the spectral parameter // Math. Notes — 2003 — vol. 74, N 2, 302–307.

[3] *Keldysh, M.V.* // Doklady of AN USSR. — 1951 — vol. 77, N 1, 11–14.

[4] *Malamud, M.M.* Questions of uniqueness in inverse problems for systems of differential equations on a finite interval. // Trans. Moscow Math. Soc. — 1999 — vol. 60, 173–224.

[5] *Malamud, M.M., Oridoroga, L.L.* Completeness theorems for systems of differential equations // Funct. Anal. Appl. — 2000 — vol. 34, N 4, 308–310.

[6] *Marchenko, V.A.* Sturm-Liouville Operators and their Applications (Russian) — Kiev — "Naukova Dumka— 1977 — 331 pp.

[7] *Oridoroga, L.L.* Boundary value problems for 2×2 Dirac type systems with spectral parameter in boundary conditions // Methods Funct. Anal. Topology — 2001 — vol. 7, N 1, 82–87.

[8] *Shkalikov, A.A.* The completeness of the eigen- and associated functions of an ordinary differential operator with nonregular splitting boundary conditions (Russian) // Funkcional. Anal. i Priložen — 1976 — vol. 10, N 4, 69–80.

[9] *Shkalikov, A.A.* Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. (Russian) // Trudy Sem. Petrovsk. N 9 (1983), 190–229.

[10] *Tarapova, E.I.* A Sturm-Liouville boundary value problem with nonlinear boundary conditions. I. (Russian) // Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen — 1979 — vol. 31, 157–160.

[11] *Tarapova, E.I.* A Sturm-Liouville boundary value problem with nonlinear boundary conditions. II. (Russian) // Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen — 1979 — vol. 32, 82–87.

[12] *Trooshin, I., Yamamoto, M.* Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems // Appl. Anal. — 2001 — vol. 80, N 1-2, 19–51.

[13] *Trooshin, I., Yamamoto, M.* Spectral properties and an inverse eigenvalue problem for nonsymmetric systems of ordinary differential operators // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2002 — vol. 10, N 6, 643–658.

E-mail: `Sha@UWasa.Fi`, `oridoroga@skif.net`

Section 3

OPTIMIZATION, CONTROL, GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

О МИНИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ПРИ ВЫБОРЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ, НЕ ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ЗАИМСТВОВАНИЯ

Т.А. Белкина
Центральный экономико-математический институт РАН, Москва
А.О. Куркина
Московский институт электроники и математики, Москва

Исследуется проблема оптимального управления инвестициями в классической модели страхования с целью минимизации вероятности разорения на бесконечном интервале времени. Используются два вида активов - рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет или облигации). При этом исключается возможность заимствования денежных средств.

We consider a problem of the optimal investment in a classical risk model. The goal is to minimize the probability of ruin for the problem with infinite time horizon. Risky assets and bonds are used. Admissible strategies exclude the borrowing.

1. Введение

Данная работа посвящена актуальной проблеме использования финансовых инструментов в целях уменьшения риска страхования. Взаимосвязь актуарной и финансовой математик, общность ряда задач, стоящих перед современными финансами и страхованием, а также единство используемых методов неоднократно обсуждались в литературе (см. работы [1]-[3] и содержащуюся в них библиографию).

Традиционной характеристикой платежеспособности страховой компании является вероятность неразорения, которая учитывается в качестве параметра при расчете премий и резервов. Исследование вероятности неразорения как функции начального капитала занимает одно из центральных мест в работах, посвященных описанию участия страховых компаний или пенсионных фондов на финансовом рынке путем принятия различных инвестиционных решений (см.[4]-[10]). При этом в некоторых работах обсуждался вопрос о том, что финансовый риск может оказаться существенным для страховых компаний, и неосторожное использование рисковых активов может ослаблять платежеспособность компании не в меньшей мере, чем большие выплаты по требованиям [5]-[7]. В то же время правильное использование именно рисковых активов позволяет существенно уменьшить риск страхования, в связи с чем становится актуальной проблема оптимального управления инвестициями с целью минимизации вероятности разорения. Эта проблема для различных моделей рассматривалась в [8]-[10]. В частности, в [8], где в качестве исходной модели страхования рассматривалась классическая модель Крамера-Лундберга, а в роли финансового инструмента выступают акции, цена которых моделируется геометрическим броуновским движением, получена оптимальная стратегия инвестиций в предположении возможности заимствований. Необходимость заимствований может возникать по крайней мере при малых значениях резерва, в частности, как показывает анализ результатов [8], в случае экспоненциально распределенных требований заем осуществляется в размере, отношение которого к резерву неограниченно возрастает при уменьшении резерва.

В данной работе в рамках исходной модели [8] мы будем исследовать оптимальную стратегию инвестиций в ситуации, когда заем средств не допускается, но используется два вида активов - рисковые и безрисковые. При этом основное внимание будет уделено случаю, когда отдельные страховые требования имеют экспоненциальное распределение.

2. Постановка задачи

Рассмотрим классический процесс риска $R_t = u + ct - \sum_{1}^{N(t)} Z_k$, где u - величина начального резервного фонда, c - скорость поступления страховых взносов, $\sum_{1}^{N(t)} Z_k$ - страховые выплаты, $N(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ.

Величины последовательных исков $Z_1, Z_2, ...$ будем считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(z)$, $F(0) = 0$, которые, кроме того, не зависят от процесса $N(t)$.

Пусть m - математическое ожидание предъявленного иска. Ниже мы в общем случае не будем предполагать наличие положительной нагрузки безопасности, т.е. что $c > \lambda m$, так как положительный снос, необходимый для увеличения резерва, возникает при инвестировании в ценные бумаги.

Предположим, что страховая компания имеет возможность инвестирования своего резерва в рисковые и безрисковые активы (для краткости будем в дальнейшем их называть соответственно акциями и облигациями). Пусть эволюция цен акций описывается геометрическим броуновским движением: $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t)$, где S_t - цена акции в момент t, μ - ожидаемая доходность акции, $\sigma > 0$ - волатильность акции. Изменение цены облигации описывается соотношением $dB_t = rB_t dt$, где B_t - цена облигации в момент t ,r - доходность облигации, $0 < r < \mu$. Будем предполагать, что в каждый момент времени резерв компании имеет вид $X_t = \gamma_t S_t + \beta_t B_t$, где γ - количество акций в портфеле компании, β - количество облигаций. Пусть теперь $\alpha_t = \gamma_t S_t / X_t$ - доля стоимости акций в портфеле компаний, $1 - \alpha_t = \beta_t B_t / X_t$ - доля стоимости облигаций в портфеле.

Тогда изменение резерва можно представить соотношением

$$dX_t = \alpha_t X_t \mu dt + \alpha_t X_t \sigma dw_t + (1 - \alpha_t) X_t r dt + dR(t), \quad X(0) = u. \tag{1}$$

Функцию $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geq 0}$, будем рассматривать как неупреждающее управление, или случайный процесс, предсказуемый относительно естественной фильтрации $\{\Im_t\}$, порожденной $\{R_{t_-}, W_t\}$. Управление $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ будем называть допустимым, если определен процесс X_t, $0 \leq t < \infty$, и при этом $0 \leq \alpha_t \leq 1$ для любого t.

Моментом разорения будем называть момент остановки $\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$. Обозначим $\psi(u) = P(\tau < \infty)$ вероятность разорения за конечное время как функцию начального резерва u. Тогда $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ - вероятность неразорения.

Ниже будем рассматривать вероятность неразорения для случая постоянной доли вложения резерва в рисковый актив, т.е. $\alpha_t = \alpha_0, \;\; \alpha_0 \in [0, 1], \;\; t \geq 0$, (соответствующее управление будем обозначать α^0: $\alpha^0 = \{\alpha_0\}_{t \geq 0}$), а также для случая оптимального управления инвестициями, минимизирующего вероятность неразорения, которое обозначим $\alpha^* = \{\alpha^*_t\}$.

Так как управляемый процесс является однородным марковским, оптимальное управление принадлежит классу M управлений, порожденных стационарными марковскими стратегиями (в дальнейшем будем называть их инвестиционными стратегиями или просто стратегиями). Точнее, любое управление $\alpha = \{\alpha_t\}$ из этого класса имеет вид $\alpha_t = A(X_{t_-})$, где стратегия $A : \mathbf{R} \to [0, 1]$ - некоторая измеримая функция. Ясно, что управление α^0 также принадлежит классу M (соответствующая стратегия $A_0(x) \equiv \alpha_0$). Стратегию, порождающую оптимальное управление α^*, будем обозначать в дальнейшем A^*.

Ясно, что вероятность неразорения будет зависеть от стратегии инвестирования, т.е. $\varphi(u) = \varphi^A(u)$, где A - произвольная допустимая стратегия. Класс допустимых стратегий определим как класс всевозможных функций $A(t, w_{[0,t]}, R_{[0,t)})$, определенных на траекториях процессов w_t и R_t и порождающих допустимые управления (здесь $w_{[0,t]} = \{(s, w_s), 0 \leq s \leq \; t\}$, $R_{[0,t)}$ определяется аналогично).

Функция Беллмана для задачи минимизации вероятности разорения на бесконечном интервале времени имеет вид

$$\delta(u) = \sup_{A} \varphi^{A}(u), \tag{2}$$

где супремум берется по всем допустимым стратегиям, и таким образом $\delta(u)$ обозначает оптимальное значение вероятности неразорения при начальном резерве u, т.е. $\delta(u) = \varphi^{A^*}(u)$.

3. Уравнения для вероятности неразорения

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана, используя соображения, аналогичные приведенным в [8], при $u > 0$ получим:

$$\sup_{0\le\alpha\le1} \left\{ \lambda E[\delta(u-Z) - \delta(u)] + [\delta'(u)(\alpha u\mu + (1-\alpha)ur + c)] + \frac{1}{2}\alpha^2 u^2 \sigma^2 \delta''(u) \right\} = 0, \tag{3}$$

где Z - случайная величина с функцией распределения $F(z)$. При этом функция $\delta(u)$ должна удовлетворять краевому условию

$$-\lambda\delta(0) + c\delta^{'}(+0) = 0 \tag{4}$$

В то же время для вероятности неразорения φ^{A_0}, соответствующей стратегии A_0, $\alpha_0 \in [0,1]$, т.е. постоянной структуре инвестиций, при $u > 0$ получим уравнение

$$\frac{1}{2}\sigma^2\alpha_0^2 u^2 \varphi^{''}(u) + [(\alpha_0\mu + (1-\alpha_0)r)u + c]\varphi^{'}(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int\limits_0^u \varphi(u-y)dF(y) = 0 \tag{5}$$

с краевым условием

$$-\lambda\varphi(0) + c\varphi^{'}(+0) = 0 \tag{6}$$

(в обозначении стратегии индекс для краткости опущен).

4. Исследование вероятности неразорения в случае постоянной структуры инвестиций и экспоненциального распределения размера требований

Обозначим

$$a = \alpha_0\mu + (1-\alpha_0)r,\ b = \alpha_0\sigma. \tag{7}$$

Тогда уравнение (5) приобретает вид

$$\frac{1}{2}b^2u^2\varphi^{''}(u) + [au + c]\varphi^{'}(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int\limits_0^u \varphi(u-y)dF(y) = 0, \tag{8}$$

что, как легко видеть, соответствует вероятности неразорения в случае полного вложения резерва в акции с параметрами a и b. В случае экспоненциального распределения размеров требований, т.е. если $F(x) = 1 - e^{-x/m}$, $m > 0$, уравнение (8) после дифференцирования преобразуется к виду

$$u^2\varphi^{'''}(u) + [2(1+\frac{a}{b^2})u + \frac{2c}{b^2} + \frac{u^2}{m}]\varphi^{''}(u) + 2[\frac{a}{mb^2}u + (a - \lambda + \frac{c}{m})\frac{1}{b^2}]\varphi^{'}(u) = 0. \tag{9}$$

При этом вероятность неразорения $\varphi(u)$, удовлетворяющая (9), для больших значений начального резерва была исследована в [7]. Там была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $F(x) = 1 - e^{-x/m}$, $m > 0$. *Пусть также* $b > 0$. *Тогда*

1)если $\rho := 2a/b^2 > 1$, *то для некоторого* $K > 0$

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-\rho}(1 + o(1)),\quad u \to \infty;$$

2)если $\rho < 1$, *то* $\varphi(u) = 0$ *для любого* u.

В то же время хорошо известно, в этой же в модели с положительной нагрузкой безопасности и распределением страховых требований, имеющим "не тяжелые хвосты", при отсутствии всяких инвестиций справедлива оценка Лундберга, показывающая, что вероятность разорения убывает экспоненциально, когда начальных резерв стремится к бесконечности. Более того, для экспоненциально распределенных требований вероятность неразорения представляется в следующей простой форме:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} exp\big(-\frac{\theta}{1+\theta}u\big), \tag{10}$$

где $\theta = \frac{c}{\lambda m} - 1 > 0$.

Для дальнейших исследований нам понадобится асимптотика вероятности неразорения при стремлении начального резерва к нулю. Эта асимптотика будет нужна при исследовании оптимальных стратегий и для корректной постановки сингулярной краевой задачи[1] в целях определения вероятности неразорения при любом начальном резерве и ее численного решения.

Теорема 2. *Вероятность неразорения $\varphi(u)$, удовлетворяющая (8), допускает следующее асимптотическое представление при малых u:*

$$\varphi(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k u^k, \tag{11}$$

где C_0 -некоторая константа, $C_1 = \frac{\lambda}{c} C_0$, а для $n \geq 2$

$$C_n = -\frac{\frac{(n-2)C_{n-2}}{m}((n-3)\frac{\sigma^2}{2} + \mu) + (n-1)C_{n-1}((n-1)(n-2)\frac{\sigma^2}{2} + (n-1)\mu - \lambda + \frac{c}{m})}{n(n-1)c}.$$

Соотношение (11) означает, что для любого u в некоторой окрестности нуля $\varphi(u) - \sum\limits_{k=0}^{n} C_k u^k = o(u^n)$.

Доказательство. Для исследования асимптотики будем использовать метод асимптотической квазидиагонализации (см. [12] и цитируемую там литературу). Для этого приведем уравнение (9) к системе. Обозначим

$$y_1 = \varphi'(u), \; y_2 = u\varphi''(u). \tag{12}$$

Тогда $y_2 = uy_1'$, $y_1' = y_2/u$, $y_2' = u\varphi'''(u) + \varphi''(u)$ и уравнение (9) преобразуется к системе вида

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_2}{u} \\ y_2' = -\frac{2}{b^2}[(a - \lambda + \frac{c}{m})\frac{1}{u} + \frac{a}{m}]y_1 - [\frac{2c}{b^2}\frac{1}{u^2} + 2(\frac{1}{2} + \frac{a}{b^2})\frac{1}{u} + \frac{1}{m}]y_2 \end{cases}.$$

Запишем теперь эту систему в виде

$$y' = (A_0/u^2 + A_1/u + A_2)y, \tag{13}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix},$$

$d_0 = -\frac{2c}{b^2}$, $d_1 = -\frac{2}{b^2}(a - \lambda + \frac{c}{m})$, $d_2 = -2(1/2 + \frac{a}{b^2}), d_3 = -\frac{2a}{b^2 m}$, $d_4 = -1/m$.

В уравнении (13) произведем теперь замену переменной: $u = 1/\tau$. Тогда уравнение (13) преобразуется к виду:

$$\dot{y} = -(A_0 + A_1/\tau + A_2/\tau^2)y. \tag{14}$$

[1] Заметим, что в нуле (так же как и на бесконечности) уравнение имеет иррегулярную особенность (см., например, [11])

Ясно, что теперь задача сводится к исследованию асимптотики решения данной системы при $\tau \to \infty$. Далее произведем еще одну замену: $y = (E + T/\tau)z$, где E - единичная матрица, а матрицу T выберем таким образом, чтобы было выполнено соотношение

$$z' = -[A_0 + \frac{\tilde{A}_1}{\tau} + O(\frac{1}{\tau^2})]z, \tag{15}$$

где $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, т.е. чтобы матрица при $1/\tau$ стала бы диагональной, так же, как и матрица при τ^0 (диагональная матрица A_0 в данном случае остается неизменной). После указанной замены уравнение (14) приобретет вид:

$$z' = (E + T/\tau)^{-1}(T/\tau^2 - (A_0 + A_1/\tau + A_2/\tau^2)(E + T/\tau))z \tag{16}$$

Таким образом, из (16) и (15) имеем

$$T/\tau^2 - (A_0 + A_1/\tau + A_2/\tau^2)(E + T/\tau) = -(E + T/\tau)[A_0 + \frac{\tilde{A}_1}{\tau} + O(\frac{1}{\tau^2})].$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при $1/\tau$:
$-A_0T + TA_0 = A_1 - \tilde{A}_1$, и обозначив $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$, получим, что $t_1 = 0$,
$t_2 = -\frac{b^2}{2c}$, $t_3 = -\frac{a-\lambda}{c} - \frac{1}{m}$, $t_4 = 0$. Таким образом, получаем систему

$$z' = -\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\tau^2})\right] z,$$

решение которой асимптотически, при $\tau \to \infty$, эквивалентно решению системы $z' = -[A_0 + \tilde{A}_1/\tau]z$ (см. [11]). Решение последней системы, очевидно, представляется в виде: $z_1 = c_1, z_2 = c_2\tau^{-d_2}e^{-d_0\tau}$, где c_1,c_2 - некоторые константы. Производя обратные преобразования переменных, имеем $y_1 = c_1 + c_2u^{d_2+1}e^{-\frac{d_0}{u}}t_2$, $y_2 = c_2u^{d_2}e^{-\frac{d_0}{u}} + c_1ut_3$. Так как $d_0 < 0$, то в силу (12) и ограниченности вероятности неразорения $\varphi(u)$ полагаем $c_2 = 0$. Тогда получаем следующее асимптотическое представление решения при бесконечно малом начальном капитале: $\varphi(u) = C_0 + C_1u + C_2u^2 + o(u^2)$, где $C_1 = \frac{\lambda}{c}C_0$ в силу (6), $C_2 = C_1t_3/2 = -C_1(\frac{a-\lambda}{2c} + \frac{1}{2m})$. Более того, ряд (11) является асимптотическим решением уравнения (9), так как можно найти коэффициенты этого ряда при его подстановке в уравнение. Теорема доказана.

5. Оптимальная стратегия инвестиций и вероятность неразорения

5.1. **Проверочная теорема.** Прежде чем обратиться к решению уравнения Беллмана (3), сформулируем следующее утверждение относительно функции $\delta(u)$, являющейся для любого u решением оптимизационной задачи (2).

Лемма 1. *Пусть для каждого $u \geq 0$ существует $\delta(u)$ - решение оптимизационной задачи (2). Тогда $\delta(u)$ является неубывающей функцией начального резерва u.*

Доказательство. Действительно, пусть $x < y$, A^* - оптимальная стратегия и $\{\alpha_t^*\}$ - оптимальное управление, соответствующее начальному резерву x. Соответствующий процесс вида (1) при$\alpha_t \equiv \alpha_t^*$, $u = x$ обозначим X^*. Рассмотрим теперь процесс вида

$$dY_t = \alpha_t^*Y_t\mu dt + \alpha_t^*Y_t\sigma dw_t + (1 - \alpha_t^*)Y_trdt + dR(t), \ \ Y_0 = y. \tag{17}$$

Заметим, что $Y_t - X_t^* = (y - x)\exp(H_t^{\alpha^*})$, где $H_t^{\alpha^*} = \int_0^t[\alpha_\tau^*(\mu - r) + r - (\alpha_\tau^*)^2\sigma^2/2]d\tau +$ $+ \int_0^t \alpha_\tau^*\sigma dw_\tau$. Следовательно, в силу неравенства $x < y$ имеем $Y_t \geq X_t^*$ п.н. В то же время управление $\{\alpha_t^*\}$ является допустимым и для соответствующей стратегии A получаем $\delta(y) \geq \varphi^A(y) \geq \varphi^{A^*}(x) = \delta(x)$, и лемма доказана.

Следующее утверждение касается решения уравнения Беллмана (3).

Теорема 3. *Пусть существует неубывающая дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $\{u > 0\}$ функция $\delta(u)$, удовлетворяющая уравнению Беллмана (3) и условиям $\delta(0) > 0$, $\delta(u) = 0$ при $u < 0$. Тогда*

1) $\delta(u)$ - строго возрастающая функция;

2) супремум в (3) достигается при

$$\alpha = B(u, (\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)), \tag{18}$$

где

$$B(u, z) = \begin{cases} -\frac{(\mu-r)}{\sigma^2 u}z, & \text{если } 0 \le -\frac{(\mu-r)}{\sigma^2 u}z \le 1 \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases};$$

3) $\delta(u)$ является решением интегродифференциального уравнения

$$-\lambda\delta(u) + \lambda\int\limits_0^u \delta(u-x)dF(x) + \delta^{'}(u)[B(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)])u\mu + (1 - B(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)]))ur + c]+$$

$$+\frac{1}{2}B^2(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)])u^2\sigma^2\delta^{''}(u) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим $B_0(u, z) = -\frac{(\mu-r)}{\sigma^2 u}z$. Предположим, для некоторого $u > 0$ выполнено неравенство $\delta^{''}(u) > 0$. Тогда в силу непрерывности $\delta^{''}$ последнее верно в некоторой окрестности u. Следовательно, $\delta^{'}(u) > 0$, так как в противном случае, т.е. если бы было выполнено $\delta^{'}(u) = 0$, то $\delta(u)$ убывало бы в некоторой окрестности левее u, а по предположению $\delta(u)$ является неубывающей. В этом случае супремум в (3) достигается при $\alpha = 1$, следовательно, в некоторой окрестности u функция δ удовлетворяет уравнению (8) при $a = \mu$, $b = \sigma$ (в рассматриваемом случае $B_0(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)]) < 0$).

Пусть теперь $\delta^{''}(u) = 0$ для некоторого $u > 0$. Тогда вновь $\delta^{'}(u)$ не может быть равно нулю, так как получим противоречие в уравнении (3). Действительно, пусть u_0 - наименьшее среди $u > 0$ с указанными свойствами, т.е. $\delta^{''}(u_0) = 0$ и $\delta^{'}(u_0) = 0$. Но тогда левая часть в уравнении (3) отрицательна при $u = u_0$. Следовательно, супремум в (3) достигается в единице и для вероятности неразорения получаем уравнение $\delta^{'}(u)(u\mu + c) = -\lambda\mathbf{E}(\delta(u - Z) - \delta(u))$ (в этом случае $B_0(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)])$ обращается в бесконечность).

Если же, наконец, $\delta^{''}(u) < 0$, то $\delta^{'}(u)$ также не может быть равно нулю по соображениям, аналогичным приведенным выше, следовательно, $\delta^{'}(u) > 0$ и супремум в (3) достигается либо при $\alpha = B_0(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)])$, либо при $\alpha = 1$, если $B_0(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)]) > 1$.

Во всех возможных случаях, таким образом, производная функции δ строго положительна и супремум в (3) достигается при $\alpha = B(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)])$ (тем самым доказаны утверждения 1) и 2) теоремы). Следовательно, подставляя полученное выражение для α в уравнение (3), получим утверждение 3). Теорема доказана.

Заметим, что для тех u, для которых функция $B(u, [\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u)])$ принимает значение единица, приходим к уравнению вида (8), где a и b определяются из (7) при $\alpha_0 = 1$ (т.е. $a = \mu$ и $b = \sigma$). В противном случае для соответствующих u имеем

$$\lambda\int\limits_0^\infty (\delta(u-x) - \delta(u))dF(x) + \delta^{'}(u)(c + ur) = \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2(\delta^{'}(u))^2}{\sigma^2\delta^{''}(u)}. \tag{20}$$

И наконец, сформулируем и докажем проверочную теорему, устанавливающую связь между решением уравнения Беллмана и решением оптимизационной задачи (2) для случая так называемых "надежных акций", т.е. удовлетворяющих условию $\mu > \sigma^2/2$.

Теорема 4. *Пусть $\mu > \sigma^2/2$ и существует функция $\delta(u)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3, а также условию*

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1. \tag{21}$$

Тогда $\delta(u)$ является решением оптимизационной задачи (2). При этом $\alpha^*(t) = A^*(X_{t_-})$, где $A^*(u) = B(u, (\delta^{'}(u)/\delta^{''}(u))$.

Доказательство. Обозначим $H_t^\alpha = \int_0^t [\alpha_\tau(\mu - r) + r - (\alpha_\tau)^2\sigma^2/2]d\tau + \int_0^t \alpha_\tau \sigma dw_\tau$. Покажем сначала, что в случае "надежных акций"для любого допустимого управления α при $t \to \infty$

$$H_t^\alpha \to \infty \ \text{ п.н.} \tag{22}$$

Действительно, выберем некоторое $\varepsilon > 0$, такое что $\mu > \sigma^2(1+\varepsilon)/2$. Тогда

$$H_t^\alpha \geq c_1 t + M_t + c_2\langle M\rangle_t, \tag{23}$$

где c_1, c_2 - положительные константы, $c_1 = \min\{r, \mu - \sigma^2(1+\varepsilon)/2\}$, $c_2 = \varepsilon/2$, $M_t = \int_0^t \alpha_\tau \sigma dw_\tau$, $t \geq 0$, и $\langle M\rangle_t = \int_0^t \alpha_\tau^2 \sigma^2 d\tau$, $t \geq 0$, - локально квадратично интегрируемый мартингал и его квадратическая характеристика соответственно. Положим $\langle M\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t$, и пусть $\{M \to\}$ - множество, где $\lim_{t\to\infty} M_t$ существует и является конечной случайной величиной. Известно (см., например, [13]), что $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} \subseteq \{M \to\}$, а на множестве $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$ $\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{a+\langle M\rangle_t} = 0$ для любой константы $a > 0$. Отсюда легко видеть, что $M_t + c_2\langle M\rangle_t \to \infty$ п.н. на $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$, а на $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$ сумма $M_t + c_2\langle M\rangle_t$ сходится почти наверное к конечной случайной величине. Следовательно, с учетом (23) соотношение (22) доказано.

Пусть теперь A - произвольная допустимая стратегия и α - соответствующее допустимое управление. Обозначим $X(u, \alpha, t)$ процесс, являющийся решением уравнения (1) при управлении α и начальном состоянии u. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть τ_ε^* и τ - моменты разорения для $X(u+\varepsilon, \alpha_\varepsilon^*, t)$ и $X(u, \alpha, t)$ соответственно, где $\alpha_\varepsilon^*(t) = A^*(X(u+\varepsilon, \alpha_\varepsilon^*, t_-))$. Заметим, что так как $X(u+\varepsilon, \alpha, t) - X(u, \alpha, t) = \varepsilon \exp H_t^\alpha$, то в силу (22) $X(u+\varepsilon, \alpha, t) \to \infty$ на множестве $\{\tau = \infty\}$. Можно показать, используя уравнение Беллмана (3), утверждение теоремы 3 и условие (21), что

$$\delta(X(u+\varepsilon, \alpha_\varepsilon^*, t \wedge \tau_\varepsilon^*)) \tag{24}$$

является мартингалом, и для всех $t > 0$

$$\delta(u+\varepsilon) = \mathbf{E}\delta(X(u+\varepsilon, \alpha_\varepsilon^*, t\wedge\tau_\varepsilon^*)), \tag{25}$$

в то время как $\delta(u+\varepsilon) \geq \mathbf{E}\delta(X(u+\varepsilon, \alpha, t\wedge\tau))$.

В силу условия (21) имеем

$$\delta(u+\varepsilon) \geq \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\delta(X(u+\varepsilon, \alpha, t\wedge\tau))\mathbf{I}_{\{\tau=\infty\}} = \mathbf{P}(\tau = \infty) = \varphi(u).$$

Устремляя теперь ε к нулю, получим, что $\delta(u) \geq \varphi(u)$. Последнее неравенство верно в том числе и для $\varphi^*(u)$ - вероятности неразорения для процесса $X(u, \alpha^*, t)$, где $\alpha^*(t) = A^*(X(u, \alpha^*, t_-))$. В то же время, устремляя t в (25) к бесконечности, получим $\delta(u+\varepsilon) \leq \mathbf{P}(\tau_\varepsilon^* = \infty)$, а следовательно, и $\delta(u) \leq \varphi^*(u)$. Теорема доказана.

5.2. **Результаты численных расчетов и асимптотические представления вероятности неразорения для случая экспоненциального распределения размера требований.** Вопрос о существовании решения уравнения (19) пока нами не изучался, он является предметом дальнейших исследований. Однако для случая экспоненциально распределенных требований был реализован алгоритм численного решения сингулярной краевой задачи - уравнения (19) с краевыми условиями (4) и (21). Для корректной постановки этой задачи использовалось представление (11) для отхода от особой точки в нуле. Обоснование использования этого представления в окрестности нуля связано с анализом асимптотики решения уравнения (20) при малых u. В случае экспоненциального распределения требований было показано, что для решения уравнения (20) с условиями $\delta(0) > 0$ и (4) имеет место соотношение $\delta''(u) = -\frac{D_0}{\sqrt{u}}(1 + o(1))$ при $u \to 0$, $D_0 > 0$, следовательно, в некоторой окрестности нуля $A^* = 1$, и мы должны иметь дело с уравнением (9), где $a = \mu$ и $b = \sigma$. Расчеты были проведены, в частности, для следующих параметров модели: $c = 2$, $\lambda = 1$, $m = 1$, $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.5$, $r = 0,2$. При данных параметрах μ и σ акции относятся к числу "надежных". В результате был получен следующий вид оптимальной стратегии: при значениях резерва, меньших некоторой величины $s_0 \approx 1.15$ резерв должен полностью вкладываться в акции, а начиная с величины s_0, оптимальная доля инвестиций резерва в акции асимптотически убывает до нуля. Характер этого убывания следует из результатов [9], где было показано, что для решения $\delta(u)$ уравнения (20) функция $f(u) = (\frac{\delta'(u)}{\delta''(u)})^2$ удовлетворяет уравнению

$$f'(u) = \frac{\sigma^2}{(\mu - r)^2}(c + ur)(1 - \gamma_1(u)\sqrt{f(u)})(1 - \gamma_2(u)\sqrt{f(u)}), \tag{26}$$

где $\gamma_1(u) \to 1$, $\gamma_2(u) \to 0$ при $u \to \infty$; следовательно, $f(u) \to 1$. Поэтому, так как $A^*(u) = \frac{\mu - r}{\sigma^2 u}\sqrt{f(u)}$, оптимальное количество средств, вкладываемых в акции, $uA^*(u)$ стремится к константе $\frac{\mu - r}{\sigma^2}$, примерно равной 0.8 для данных параметров. При этом асимптотика вероятности неразорения, соответствующей оптимальной стратегии, при $u \to \infty$ имеет вид $\delta(u) = 1 - D_1 exp(-u)(1 + o(1))$ где $D_1 > 0$. Для сравнения осталось заметить, что если $r = 0$, то в уравнении (26) коэффициенты γ_1, γ_2 являются константами, причем $1 - \lambda/c < \gamma_1 < 1$ и $f(u) \to 1/\gamma_1^2$ при $u \to \infty$, следовательно, $uA^*(u) \to \frac{\mu - r}{\sigma^2 \gamma_1}$. При этом $\delta(u) = 1 - D_2 exp(-\gamma_1 u)(1 + o(1))$, $u \to \infty$, где $D_2 > 0$ (ср. с (10), подробнее см. [9], [10]).

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00479 и грантом Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

[1] Ширяев А.Н. Стохастические проблемы финансовой математики". Обозрение прикладной и промышленной математики. М.: ТВП, 1944, т.1, вып. 5.

[2] Мельников А.В. Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.

[3] Эмбрехтс П. Актуарный и финансовый подходы к расчетам стоимости в страховании. Обозрение прикладной и промышленной математики. М.: ТВП, т.5, вып. 1. 1998

[4] Grandell I. Aspects of risk theory. Springer, Berlin, 1991.

[5] Paulsen J. Risk theory in a stochastic environment. J.Stoch. Proc. and Appl. 1993,**21**, 327-361.

[6] Kalashnikov V., Norberg R. Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments. Preprint of Laboratory of Actuarial Mathematics, Univ. of Kopenhagen, 2000.

[7] Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S. In the Insurance business risky investments are dangerous. Finance and Stochastics, Vol. 6, No 2, 2002 April, p.227-235.

[8] Hipp C., Plum M. Optimal investment for insurers. Insurance Math. Econom. **27**, 215-228

[9] Белкина Т.А., Чеканина С.В. Оптимальное управление инвестициями в динамической модели страхования. В сб. "Моделирование механизмов функционирования экономики России на современном этапе". Вып. 5. М.:ЦЭМИ РАН, 2001, с. 101-118.

[10] Белкина Т.А., Чеканина С.В., Рачкова С.Б. Дополнение к статье "Оптимальное управление инвестициями в динамической модели страхования". В сб. "Моделирование механизмов функционирования экономики России на современном этапе". Вып. 6. М.:ЦЭМИ РАН, 2001, с.107-112.

[11] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

[12] Конюхова Н.Б. Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т.23, № 3. С.629-645.

[13] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

Белкина Т.А., к.ф.-м.н., доцент, Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, 117418, Россия

E-mail: `tbel@cemi.rssi.ru`

БЕСКОАЛИЦИОННАЯ ИГРА С ТЕКУЩИМ ИЗМЕНЕНИЕМ "СИМПАТИЙ" ОДНОГО ИЗ ИГРОКОВ. [1]

М.И. Высокос, Ю.Н. Житенева
РосЗИТЛП
Москва, Россия

Рассматривается дифференциальная линейно–квадратичная бескоалиционная игра двух лиц с изменением "симпатий" одного из игроков. Формализовано решение этой игры.

A differential linear–quadratic dynamical problem with alternate aim is considered. A solution is formalized.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную позиционную бескоалиционную линейно-квадратичную игру двух лиц

$$\langle \{1,2\}, \Sigma, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \{\mathbf{J}_i(U, t_*, x_*)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{1.1}$$

Здесь динамика управляемой системы Σ описывается обыкновенным линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2,\ x(t_*) = x_*, \tag{1.2}$$

где t — текущее время; $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1,2)$; элементы $n\times n$-матрицы $A(t)$ предполагаются непрерывными на $[0,\vartheta]$ (обозначим этот факт $A(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$); момент окончания игры $\vartheta > 0$ и начальная позиция $(t_*, x_*) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$ фиксированны.

Множество стратегий $\mathbf{U}_i$ у i-го игрока

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x) | u_i(t,x) = Q_i(t)x + q_i(t) \forall Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta],\\ q_i(\cdot) \in C_n[0,\vartheta] \text{ за исключением быть может точки } t = t_1\} (i = 1,2).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Партия игры развертывается следующим образом. Игроки независимо друг от друга выбирают и используют свои стратегии первый — $U_1 \in \mathbf{U}_1$ и второй — $U_2 \in \mathbf{U}_2$. В результате складывается ситуация $U = (U_1, U_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$. После этого развитие игры во времени происходит в соответствии с векторным линейным неоднородным дифференциальным уравнением с непрерывными (по t) коэффициентами

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t)]x + q_1(t) + q_2(t),\ x(t_*) = x_*.$$

Решение этого уравнения $x(t)$ существует, единственно, непрерывно дифференцируемо и продолжимо на интервал $[t_*, \vartheta]$. Оно "порождает"реализации выбранных игроками стратегий $u_i[t] = u_i(t, x(t))$ $(i = 1,2)$. На полученных в итоге наборах $\{(x(t), u_1[t], u_2[t]) | \, t_* \le t \le \vartheta\}$ определена функция выигрыша i-го игрока, заданная квадратичным функционалом

$$J_i(U, t_*, x_*) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t])dt, \tag{1.4}$$

где $n \times n$-матрицы C_i, D_{ij} $(i,j = 1,2)$ постоянны и симметричны; штрих сверху означает операцию транспонирования.

На "содержательном уровне", оба игрока стремятся выбрать и использовать свои стратегии $U_i \in \mathbf{U}_i$, доставляющие им наибольшие возможные собственные выигрыши $J_i(U, t_*, x_*)$ $(i = 1,2)$ в сложившейся ситуации U. При этом 1-ый игрок желает влиять на выигрыш 2-го игрока: за период времени $[t_*, t_1)$ его увеличить, а за промежуток $[t_1, \vartheta]$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ(02-01-00612)

уменьшить (насколько это возможно). Момент времени $t_1 \in (t_*, \vartheta)$ будем считать фиксированным и заданным до начала игры. Отметим, что игроки не знают о преследуемых друг другом целях.

2. Формализация решения

Формализуем решение игры (1.1).

Определение 2.1. *Ситуацию $U^* \in \mathbf{U}$ назовем t_1-равновесной для игры (1.1), если для всякой начальной позиции $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$ будут выполняться следующие условия:*

1^0) *при $t \in [t_*, t_1)$ для каждого $U_1 \in \mathbf{U_1}$ несовместна система неравенств*

$$\begin{aligned} J_1(U_1, U_2^*, t_*, x_*) > J_1(U^*, t_*, x_*), \\ J_2(U_1, U_2^*, t_*, x_*) > J_2(U^*, t_*, x_*); \end{aligned} \tag{2.1}$$

2^0) *при $t \in [t_1, \vartheta]$ для любых $U_1 \in \mathbf{U_1}$ система неравенств*

$$\begin{aligned} J_1(U_1, U_2^*, t_1, x(t_1, U_1, U_2^*)) > J_1(U^*, t_1, x(t_1, U^*)), \\ J_2(U_1, U_2^*, t_1, x(t_1, U_1, U_2^*)) < J_2(U^*, t_1, x(t_1, U^*)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

несовместна;

3^0) *для всех $U_2 \in \mathbf{U_2}$*

$$J_2(U_1^*, U_2, t_*, x_*) \leq J_2(U^*, t_*, x_*). \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. Стратегия 1-го игрока из t_1-равновесной ситуации U^* имеет вид

$$U_1^* = \begin{cases} U_{11}^* & \text{при } t \in [t_*, t_1), \\ U_{12}^* & \text{при } t \in [t_1, \vartheta]. \end{cases}$$

где U_{11}^* удовлетворяет условию 1^0, а U_{12}^* – условию 2^0 определения 2.1. Поэтому будем искать t_1- равновесную ситуацию $U^* = (U_1^*, U_2^*)$ в виде

$$U^* = \begin{cases} (U_{11}^*, U_{21}^*) & \text{при } t \in [t_*, t_1), \\ (U_{12}^*, U_{22}^*) & \text{при } t \in [t_1, \vartheta), \end{cases} \tag{2.4}$$

причем U_{21}^* удовлетворяет условию 3^0 определения при $t \in [t_*, t_1)$, а U_{22}^* отвечает этому же условию при $t \in [t_1, \vartheta]$. Фактически U_{i1}^* является сужением U_i^* на $[t_*, t_1)$ так же как и U_{i2}^* — сужение на $[t_1, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$.

Замечание 2.2. Функции выигрыша игроков из (1.4) представим в виде

$$J_i(U, t_*, x_*) = \int_{t_*}^{t_1} f_i(t, u, x)dt + \int_{t_1}^{\vartheta} f_i(t, u, x)dt,$$

где

$$\begin{aligned} f_i(t, u, x) = x'(t)(A'C_i + C_iA)x(t) + 2u_1'[t]C_ix(t) + 2u_2'[t]C_ix(t) + \\ + u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t] + \tfrac{x_*'C_ix_*}{\vartheta - t_*} \ (i = 1, 2). \end{aligned}$$

3. Достаточные условия

Приведем достаточные условия существования t_1-равновесной ситуации U^* в игре (1.1). Для этого рассмотрим вспомогательную дифференциальную игру

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \{J^{(i)}(U, t_*, x_*)\}_{i=1,2} \rangle. \tag{3.1}$$

Эта игра отличается от (1.1) лишь функциями выигрыша игроков

$$\begin{aligned} J^{(1)}(U, t_*, x_*) = \textstyle\int_{t_*}^{t_1} [\alpha f_1(t, u, x) + (1 - \alpha) f_2(t, u, x)]dt + \\ + \textstyle\int_{t_1}^{\vartheta} [\beta f_1(t, u, x) - (1 - \beta) f_2(t, u, x)]dt, \\ J^{(2)}(U, t_*, x_*) = \textstyle\int_{t_*}^{t_1} f_2(t, u, x)dt + \int_{t_1}^{\vartheta} f_2(t, u, x)dt, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где постоянные $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} D_i(\alpha) = \alpha D_{1i} + (1-\alpha)D_{2i}, \\ D_i(\beta) = \beta D_{1i} - (1-\beta)D_{2i},\ i = 1,2, \\ C_1(\alpha) = \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2, \\ C_2(\beta) = \beta C_1 - (1-\beta)C_2. \end{gathered} \tag{3.3}$$

С учетом обозначений (3.3) функция выигрыша $J^{(1)}$ первого игрока из (3.2) примет вид

$$J^{(1)}(U, t_*, x_*) = \int\limits_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t,u,x)dt + \int\limits_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t,u,x)dt, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered} f^{(1)}(t,u,x) = x'(t)[A'C(\alpha) + C(\alpha)A]x(t) + 2u_1'[t]C(\alpha)x(t) + \\ +2u_2'[t]C(\alpha)x(t) + u_1'[t]D_1(\alpha)u_1[t] + u_2'[t]D_2(\alpha)u_2[t] + \tfrac{x_*'C(\alpha)x_*}{\vartheta - t_*}, \\ f^{(2)}(t,u,x) = x'(t)[A'C(\beta) + C(\beta)A]x(t) + 2u_1'[t]C(\beta)x(t) + \\ +2u_2'[t]C(\beta)x(t) + u_1'[t]D_1(\beta)u_1[t] + u_2'[t]D_2(\beta)u_2[t] + \tfrac{x_*'C(\beta)x_*}{\vartheta - t_*}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

В качестве решения игры (3.1) будем использовать равновесную по Нэшу ситуацию. Напомним, что ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathbf{U_1} \times \mathbf{U_2}$ называется равновесной по Нэшу в игре (3.1), если при любой начальной позиции $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$ будет

$$\begin{gathered} J^{(1)}(U_1, U_2^e, t_*, x_*) \le J^{(1)}(U^e, t_*, x_*)\ \forall U_1 \in \mathbf{U_1}, \\ J^{(2)}(U_1^e, U_2, t_*, x_*) \le J^{(2)}(U^e, t_*, x_*)\ \forall U_2 \in \mathbf{U_2}. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Утверждение 3.1. *Равновесная по Нэшу ситуация U^e игры (3.1) является t_1-равновесной в игре (1.1), т.е. $U^* = U^e$.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.1, t_1 равновесная ситуация U^* может быть представлена в виде (2.4). Аналогично

$$U^e = \begin{cases} U_I^e & \text{при } t \in [t_*, t_1), \\ U_{II}^e & \text{при } t \in [t_1, \vartheta], \end{cases}$$

где $U_I^e = (U_{11}^e, U_{21}^e)$, $U_{II}^e = (U_{12}^e, U_{22}^e)$. Установим сначала, что $(U_{11}^*, U_{21}^*) = (U_{11}^e, U_{21}^e)$ при $t \in [t_*, t_1)$.

Допустим противное: $U_{11}^* \ne U_{11}^e$ и(или) $U_{21}^* \ne U_{21}^e$ при $t \in [t_*, t_1)$. Это означает, что найдутся такие начальная позиция $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$ ($[0, t_1) \subset [0, \vartheta)$) и стратегии $\bar U_1 \in \mathbf{U}_1$ и(или) $\bar U_2 \in \mathbf{U}_2$, что выполнено по крайней мере одно из условий
a) (нарушено требование 1^0 из определения 2.1)

$$\begin{gathered} J_1(\bar U_{11}, U_{21}^e, t_*, x_*) > J_1(U_I^e, t_*, x_*), \\ J_2(\bar U_{11}, U_{21}^e, t_*, x_*) > J_2(U_I^e, t_*, x_*); \end{gathered} \tag{3.7}$$

b) (нарушено требование 3^0 из определения 2.1)

$$J_2(U_{11}^e, \bar U_{21}, t_*, x_*) > J_2(U_I^e, t_*, x_*),\ t \in [t_*, t_1).$$

Поскольку U^e — равновесная по Нэшу ситуация игры (3.1), неравенство b) противоречит второму неравенству из (3.6) при $t \in [t_*, t_1)$. Поэтому $U_{21}^* = U_{21}^e$ (при $t \in [t_*, t_1)$).

Покажем теперь, что и требование 1^0 из определения 2.1 выполнено. Для этого умножим 1-ое неравенство из (3.7) на произвольную постоянную $\alpha \in [0,1]$, а 2-ое неравенство этой системы — на $1-\alpha$ и сложим. Получим

$$\begin{gathered} \alpha J_1(\bar U_{11}, U_{21}^e, t_*, x_*) + (1-\alpha) J_2(\bar U_{11}, U_{21}^e, t_*, x_*) > \\ > \alpha J_1(U_I^e, t_*, x_*) + (1-\alpha) J_2(U_I^e, t_*, x_*). \end{gathered}$$

С учетом (3.2) и (3.3), последнее неравенство примет вид

$$J^{(1)}(\bar{U}_{11}, U_{21}^e, t_*, x_*) > J^{(1)}(U_I^e, t_*, x_*),$$

что противоречит равновесности по Нэшу ситуации U^e.

Следовательно, $U_{11}^* = U_{11}^e$. Значит $(U_{11}^*, U_{21}^*) = U_I^e$ при $t \in [t_*, t_1)$.

Аналогично можно показать, что $(U_{12}^*, U_{22}^*) = U_{II}^e$ при $t \in [t_1, \vartheta]$.

Таким образом, ситуация U^e удовлетворяет всем требованиям определения 2.1. Значит, U^e является t_1-равновесной ситуацией в игре (1.1).

Замечание 3.1. Утверждение 3.1 сводит задачу нахождения t_1-равновесной ситуации игры (1.1) к нахождению ситуации равновесия по Нэшу в линейно-квадратичной дифференциальной игре (3.1).

Для построения такой ситуации воспользуемся подходящим вариантом метода динамического програмирования из [1,2]. С этой целью введем функции

$$\begin{gathered}
W_1^{(1)}(t, x, u, V_1^{(1)}) = \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x}\right]'[Ax + u_1 + u_2] + f^{(1)}(t, u, x), \\
W_1^{(2)}(t, x, u, V_1^{(2)}) = \frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial x}\right]'[Ax + u_1 + u_2] + f^{(2)}(t, u, x), \\
W_2^{(i)}(t, x, u, V_2^{(i)}) = \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial x}\right]'[Ax + u_1 + u_2] + f_2(t, u, x) \ (i = 1, 2)
\end{gathered} \tag{3.8}$$

и обозначим

$$V = \begin{cases} (V_1^{(1)}, V_2^{(1)}) & \text{при } t \in [t_*, t_1), \\ (V_1^{(2)}, V_2^{(2)}) & \text{при } t \in [t_1, \vartheta]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Утверждение 3.2. *Пусть существуют функции $u_{i1}(t, x, V)$, определенные при $t \in [0, t_1]$, функции $u_{i2}(t, x, V)$, определенные при $t \in [t_1, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$, и непрерывно дифференцируемые скалярные функции $V_i^{(j)}(t, x)$ $(i, j = 1, 2)$ такие, что*

1) при всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$V_i^{(2)}(\vartheta, x) = 0, \ V_i^{(1)}(t_1, x) = V_i^{(2)}(t_1, x) \ (i = 1, 2); \tag{3.10}$$

2) для всех $t \in [t_1, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $V_i^{(2)} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{gathered}
\max_{u_1} W_1^{(2)}(t, x, u_1, u_{22}(t, x, V), V_1^{(2)}) = \\
= W_1^{(2)}(t, x, u_{12}(t, x, V), u_{22}(t, x, V), V_1^{(2)}), \\
\max_{u_2} W_2^{(2)}(t, x, u_{12}(t, x, V), u_2, V_2^{(2)}) = \\
= W_2^{(2)}(t, x, u_{12}(t, x, V), u_{22}(t, x, V), V_2^{(2)}),
\end{gathered} \tag{3.11}$$

для любых $t \in [0, t_1), x \in \mathbb{R}^n$ и $V_i^{(1)} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$;

$$\begin{gathered}
\max_{u_1} W_1^{(1)}(t, x, u_1, u_{21}(t, x, V), V_1^{(1)}) = \\
= W_1^{(1)}(t, x, u_{11}(t, x, V), u_{21}(t, x, V), V_1^{(1)}), \\
\max_{u_2} W_2^{(1)}(t, x, u_{11}(t, x, V), u_2, V_2^{(1)}) = \\
= W_2^{(1)}(t, x, u_{11}(t, x, V), u_{21}(t, x, V), V_2^{(1)});
\end{gathered} \tag{3.12}$$

3) для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [t_1, \vartheta]$

$$W_i^{(2)}(t, x, u_{12}(t, x, V(t, x)), u_{22}(t, x, V(t, x)), V_i^{(2)}(t, x)) = 0 \ (i = 1, 2); \tag{3.13}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0, t_1)$

$$W_i^{(1)}(t, x, u_{11}(t, x, V(t, x)), u_{21}(t, x, V(t, x)), V_i^{(1)}(t, x)) = 0 \ (i = 1, 2); \tag{3.14}$$

4) $u_{ij}(t, x, V(t, x)) = u_{ij}^*(t, x)$, $U_{ij}^* \div u_{ij}^*(t, x)$, $U_{ij} \in \mathbf{U}_i$ $(i, j = 1, 2)$.

Тогда ситуация

$$U^* = \begin{cases} (U^*_{11}, U^*_{21}) \div (u_{11}(t,x), u^*_{21}(t,x)) & \textit{при } t \in [t_*, t_1), \\ (U^*_{12}, U^*_{22}) \div (u^*_{12}(t,x), u_{22}(t,x)) & \textit{при } t \in [t_1, \vartheta] \end{cases}$$

является t_1-равновесной в игре (1.1) при любых начальных позициях $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$ — произвольная начальная позиция. Построим $x^*(t)$ — решение дифференциального уравнения (1.2) при

$$u_1 = \begin{cases} u^*_{11}(t,x) & \text{для } t \in [t_*, t_1), \\ u^*_{12}(t,x) & \text{для } t \in [t_1, \vartheta], \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} u^*_{21}(t,x) & \text{для } t \in [t_*, t_1), \\ u^*_{22}(t,x) & \text{для } t \in [t_1, \vartheta]. \end{cases}$$

Далее $u^*[t] = (u^*_1[t], u^*_2[t]) = (u^*_1(t, x^*(t)), u^*_2(t, x^*(t)))$.

Покажем, что $U^* = (U^*_1, U^*_2) \div (u^*_1(t,x), u^*_2(t,x))$ является равновесной по Нэшу ситуацией игры (3.1). Доказательство разобьем на два этапа.

1 этап. Из (3.14) следует

$$\begin{gathered} 0 = \int_{t_*}^{\vartheta} W_1^{(1)}(t, x^*(t), u^*[t], V_1^{(1)}(t, x^*(t))dt = \\ = \int_{t_*}^{t_1} \frac{dV_1^{(1)}(t, x^*(t))}{dt} dt + \int_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u^*[t], x^*(t))dt = \\ = V_1^{(1)}(t_1, x^*(t_1)) - V_1^{(1)}(t_*, x_*) + \int_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u^*[t], x^*(t))dt = \\ = V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1)) + \int_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u^*[t], x^*(t))dt - V_1^{(1)}(t_*, x_*), \end{gathered}$$

так как в силу (3.10)

$$V_1^{(1)}(t_1, x^*(t_1)) = V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1)).$$

Отсюда

$$V_1^{(1)}(t_*, x_*) = V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1)) + \int\limits_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u^*[t], x^*(t))dt. \tag{3.15}$$

Из (3.13) имеем

$$\begin{gathered} 0 = \int_{t_*}^{\vartheta} W_1^{(2)}(t, x^*(t), u^*[t], V_1^{(2)}(t, x^*(t))dt = \\ = \int_{t_1}^{\vartheta} \frac{dV_1^{(2)}(t, x^*(t))}{dt} dt + \int_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u^*[t], x^*(t))dt = \\ = V_1^{(2)}(\vartheta, x^*(\vartheta)) - V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1)) + \int_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u^*[t], x^*(t))dt = \\ = \int_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u^*[t], x^*(t))dt - V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1)), \end{gathered}$$

поскольку $V_1^{(2)}(\vartheta, x^*(\vartheta)) = 0$ (согласно (3.10)).

Следовательно,

$$V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1)) = \int\limits_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u^*[t], x^*(t))dt.$$

Подставляя $V_1^{(2)}(t_1, x^*(t_1))$ из последнего равенства в (3.15), с учетом (3.4), получим

$$V_2^{(1)}(t_*, x_*) = J^{(2)}(U^*, t_*, x_*).$$

2 этап. Пусть стратегия U_1 выбрана произвольно, а $x(t)$ — решение уравнения (1.2) при $U_1 \div u_1(t,x)$, $U^*_2 \div u^*_2(t,x)$. Далее $u_1[t] = u_1(t, x(t)), u^*_2[t] = u^*_2(t, x(t))$. С учетом (3.11), (3.14) и (3.10) (при $i = 1$) имеем

$$\begin{gathered}0 \geq \int_{t_*}^{\vartheta} W_1^{(1)}(t, x(t), u_1[t], u_2^*[t], V_1^{(1)}(t, x(t)))dt = \\ = \int_{t_*}^{t_1} \frac{dV_{11}(t,x(t))}{dt} dt + \int_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt = \\ = V_1^{(1)}(t_1, x(t_1)) + \int_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt - V_1^{(1)}(t_*, x_*) = \\ = V_1^{(2)}(t_1, x(t_1)) + \int_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt - V_1^{(1)}(t_*, x_*).\end{gathered}$$

Отсюда

$$V_1^{(1)}(t_*, x_*) \geq V_1^{(2)}(t_1, x(t_1)) + \int\limits_{t_*}^{t_1} f^{(1)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt. \tag{3.17}$$

Из (3.11), (3.13) и (3.10) (при $i = 1$) получим

$$\begin{gathered}0 \geq \int_{t_*}^{\vartheta} W_1^{(2)}(t, x(t) u_1[t], u_2^*[t], V_1^{(2)}(t, x(t)))dt = \\ = \int_{t_1}^{\vartheta} \frac{dV_1^{(2)}(t,x(t))}{dt} dt + \int_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt = \\ = V_1^{(2)}(\vartheta, x(\vartheta)) - V_1^{(2)}(t_1, x(t_1)) + \int_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt = \\ = \int_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt - V_1^{(2)}(t_1, x(t_1)).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$V_1^{(2)}(t_1, x(t_1)) \geq \int\limits_{t_1}^{\vartheta} f^{(2)}(t, u_1[t], u_2^*[t], x(t))dt.$$

С учетом последнего неравенства и (3.4), неравенство (3.17) примет вид

$$V_1^{(1)}(t_*, x_*) \geq J^{(1)}(U_1, U_2^*, t_* x_*).$$

Отсюда, используя (3.16), получим

$$J^{(1)}(U^*, t_* x_*) \geq J^{(1)}(U_1, U_2^*, t_*, x_*).$$

Выбирая произвольно стратегию U_2 при фиксированной стратегии 1-го игрока $U_1^* \div u_1^*(t, x)$, аналогично получим

$$J^{(2)}(U^*, t_*, x_*) \geq J^{(2)}(U_1^*, U_2, t_*, x_*).$$

Значит, (в силу (3.6)) ситуация $U^* = (U_1^*, U_2^*)$ является равновесной по Нэшу в игре (3.1). Тогда U^* (согласно утверждению 3.1) является t_1-равновесной ситуацией игры (1.1).

Замечание 3.2. Утверждение 3.2 позволяет выделить следующие этапы построения t_1-равновесной ситуации дифференциальной игры (1.1):

1) из (3.11) и (3.12) найти $u_{ij}(t, x, V)$ $(i, j = 1, 2)$;

2) подставляя эти функции в равенства (3.13) и (3.14) соответственно, получаем системы уравнений с частными поизводными (относительно $V_i^{(j)}$ $(i, j = 1, 2)$) с граничными условиями (3.10);

3) найти решения $V_i^{(j)}(t, x)$ $(i, j = 1, 2)$ полученных систем;

4) подставляя найденные $V_i^{(j)}(t, x)$ в $u_{ij}(t, x, V_i^{(j)})$ $(i, j = 1, 2)$, получаем ситуацию U^*, являющуюся t_1-равновесной в игре (1.1).

Авторы благодарят В.И. Жуковского за обсуждение работы и замечания.

Список литературы

[1] *Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: Международный НИИ проблем управления, 1997.

[2] *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка, 1994.

Житенева Ю.Н.,Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, кафедра математики и механики, г. Москва, 123298, Россия
Высокос М.И.,Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, кафедра математики и механики, г. Москва, 123298, Россия.

E-mail: rzitlp_oz@t50.ru

ПРИНЦИП МИНИМАКСНОГО СОЖАЛЕНИЯ В ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ[1]

В.И. Жуковский, Ю.Н. Житенева
Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности
Россия, Москва

На основе принципа минимаксного сожаления формализуется гарантированное решение в линейно–квадратичной динамической задаче при неопределенности. Исследуются свойства такого решения, в частности, условия существования.

Solution existence and solutions properties are formalized and are investigated.

1. Постановка задачи

Рассматривается многокритериальная динамическая задача при неопределенности

$$\langle \Sigma, \mathbf{U}, \mathbf{Z}, \{J_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle. \tag{1.1}$$

В (1.1) множество $\mathbf{N} = \{1, \ldots, N\}$, символом Σ обозначена динамическая система, изменение состояния (фазового вектора) $x(t) \in \mathbb{R}^n$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + u + A_1 z,\ x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где A и A_1– заданные постоянные $n \times n$ и $n \times m$– матрицы соответственно; $u \in \mathbb{R}^n$– управляющее воздействие ЛПР (лица, принимающего решение); $z \in \mathbb{R}^m$– неопределенный фактор; фиксированы начальное состояние x_0, моменты начала $t_0 \geq 0$ и окончания $\vartheta > t_0$ процесса; начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$.

Допустимая стратегия ЛПР U отождествляется с n–вектор-функцией $u(t, x) = Q(t)x + q(t)$ $(U \div u(t, x))$ такой, что элементы $n \times n$–матрицы $Q(t)$ и координаты n–вектора $q(t)$ непрерывны на $[0, \vartheta]$ (этот факт далее обозначается $Q(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta]$, $q(\cdot) \in C_n[0, \vartheta]$); множество стратегий U обозначено символом $\mathbf{U}$; таким образом, выбор ЛПР своей стратегии, в конечном счете, сводится к выбору конкретных непрерывных на $[0, \vartheta]$ матрицы $Q(t)$ и вектора $q(t)$; итак,

$$\mathbf{U} = \{U \div u(t, x) | u(t, x) = Q(t)x + q(t)\ \forall Q(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta], q(\cdot) \in C_n[0, \vartheta]\}.$$

Неопределенность Z отождествляется с m–вектор-функцией $z(t, x)$ $(Z \div z(t, x))$ такой, что, *во–первых*,

$$\frac{dz}{dt} = Bz, \tag{1.3}$$

где B– заданная постоянная $m \times m$–матрица, и, *во–вторых*, функция $z(t, x)$ такова, что при $u = u(t, x)$ $(U \div u(t, x)$– любая допустимая стратегия) и $z = z(t, x)$ система (1.2) имеет единственное решение $x(t)$, продолжимое на интервал $[t_0, \vartheta]$ (например, $z(t, x)$ непрерывна на $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и липшицева по x). Множество таких неопределенностей Z обозначено в (1.1) символом $\mathbf{Z}$. Наличие "дифференциальных ограничений"вида (1.3) может быть вызвано, например, результатом появления на рынке сбыта конкурента, рост продукции которого происходит согласно (1.3), однако неизвестен ее начальный объем $z(t_0) = z_0$, и ЛПР при формировании своей стратегии $U \in \mathbf{U}$ вынужден считаться с возможностью реализации любого $z_0 \in \mathbb{R}^m$.

Принятие решений (для ЛПР) происходит следующим образом. ЛПР выбирает конкретную допустимую стратегию $U \in \mathbf{U}$, $U \div u(t, x)$. Независимо от его действий реализуется конкретная неопределенность $Z \in \mathbf{Z}$, $Z \div z(t, x)$. Затем находится решение $x(t)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 02-01-00612)

системы (1.2) при $u = u(t,x)$ и $z = z(t,x)$. Строятся реализации выбраной стратегии $u[t] = u(t,x(t))$ и указанной неопределенности $z[t] = z(t,x(t))$. На полученной тройке $(x(t),u[t],z[t])$ $(t_0 \leq t \leq \vartheta)$ определены N критериев, заданных линейно–квадратичными функционалами

$$\begin{aligned} J_i(U,Z,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_i^{(1)}x(\vartheta) + 2z'(\vartheta)C_i^{(2)}x(\vartheta) + z'(\vartheta)C_i^{(3)}z(\vartheta) + \\ +2[c_i^{(1)}]'x(\vartheta) + 2[c_i^{(2)}]'z(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta}\{u'[t][D_iu[t] + 2K_iz[t] + 2M_ix(t)] + \\ +z'[t][L_iz[t] + 2N_ix(t)] + x'(t)G_ix(t) + 2d_i'u[t] + 2l_i'z[t] + \\ +2g_i'x(t)\}dt \ (i \in \mathbf{N}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где априори заданы постоянные $n \times n-$ матрицы $C_i^{(1)}$, D_i, M_i, G_i, $n \times m$–матрицы $[C_i^{(2)}]'$, K_i, N_i', $m \times m$–матрицы $C_i^{(3)}$, L_i, n–вектора $c_i^{(1)}$, d_i, g_i, m–вектора $c_i^{(2)}$, l_i, причем $C_i^{(1)}$, $C_i^{(3)}$, D_i, L_i, G_i симметричны; штрих сверху означает операцию транспонирования. Цель ЛПР (на "содержательном уровне") состоит в выборе им такой своей стратегии $U \in \mathbf{U}$, чтобы при использовании им U все его критерии $J_i(U,Z,t_0,x_0)$, $i \in \mathbf{N}$, принимали как можно *большие* значения. Одновременно ЛПР вынужден учитывать возможность появления в (1.1) любой неопределенности $Z \in \mathbf{Z}$.

Замечание 1.1. До сих пор формализация гарантированного решения динамической задачи (1.1) проводилась (например, в [1]) на основе подходящей модификации принципа максимина (принципа Вальда [2]). Однако, *во–первых*, такой подход рассчитан на "катастрофу"–– на реализацию самой неблагоприятной для ЛПР неопределенности, и, вследствии этого, приводит подчас к "заниженным"гарантиям. *Во–вторых*, указанное гарантированное решение может не существовать (например, если в (1.4) все квадратичные формы $z'L_iz$ $(i \in \mathbf{N})$ определенно отрицательны), в то время как предлагаемое ниже на основе [3] гарантированное решение при этих ограничениях, вообще говоря, существует.

2. Формализация гарантированного решения

Для каждого критерия $J_i(U,Z,t_0,x_0)$ введем *функцию риска*, определяемую функционалом:

$$\Phi_i(U,Z,t_0,x_0) = \max_{Y \in \mathbf{U}} J_i(Y,Z,t_0,x_0) - J_i(U,Z,t_0,x_0) \ (i \in \mathbf{N}). \tag{2.1}$$

Функция риска (2.1) численно оценивает сожаление (риск) ЛПР, при неопределенности $Z \in \mathbf{Z}$ была выбрана стратегия U, а не

$$U^{(i)} = \arg\max_{Y \in \mathbf{U}} J_i(Y,Z,t_0,x_0).$$

Заметим, что, согласно (2.1), функция риска $\Phi_i(U,Z,t_0,x_0) \geq 0$ при всех $U \in \mathbf{U}$, $Z \in \mathbf{Z}$.

Затем считаем, что ЛПР в качестве критериев рассматривает функции риска $\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)$ $(i \in \mathbf{N})$ и поэтому переходит к *вспомагательной* многокритериальной задаче при неопределенности

$$\langle \Sigma, \mathbf{U}, \mathbf{Z}, \{\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{2.2}$$

где Σ, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ те же, что в (1.1), а критерии $\Phi_i(\cdot)$ имеют уже вид (2.1). В задаче (2.2) ЛПР стремится (за счет подходящего выбора стратегии $U \in \ \mathbf{U}$) к возможно *меньшим* значениям "новых"критериев $\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)$, ориентируясь на возможность реализации любой неопределенности $Z \in \mathbf{Z}$. Далее используем N–вектор $\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_N)$.

Определение 2.1. Пару $(U^*,\Phi^*(t_0,x_0)) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}^N$ назовем *гарантированным по риску решением задачи* (1.1), если существует неопределенность $Z^* \in \mathbf{Z}$ такая, что $\Phi^* = (\Phi_1^*,\ldots,\Phi_N^*)$, $\Phi_i^*(t_0,x_0) = \Phi_i(U^*,Z^*,t_0,x_0)$ $(i \in \mathbf{N})$, и при любом выборе начальной позиции $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$

1^0 для всех $U \in \mathbf{U}$ несовместна система неравенств

$$\Phi_i(U,Z^*,t_0,x_0) \leq \Phi_i(U^*,Z^*,t_0,x_0) \ (i \in \mathbf{N}), \tag{2.3}$$

из которых, по крайней мере, одно строгое;
2^0 при любых $Z \in \mathbf{Z}$ несовместна система

$$\Phi_i(U^*, Z^*, t_0, x_0) \leq \Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) \ (i \in \mathbf{N}), \tag{2.4}$$

из которых также хотя бы одно строгое.

Вектор $\Phi^*(t_0, x_0)$ назовем *векторным риском.*

Замечание 2.1. Несовместность (2.3) означает, что стратегия U^* является *минимальной по Парето* в многокритериальной задаче

$$\langle \Sigma(Z = Z^*), \mathbf{U}, \{\Phi_i(U, Z^*, t_0, x_0)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle,$$

которую получаем из (2.2) при фиксированной неопределенности $Z = Z^*$. Аналогично, несовместность (2.4) означает *максимальность по Парето* неопределенности Z^* в многокритериальной задаче, которую получаем из (2.2) при $U = U^*$.

Замечание 2.2. Пара $(U^*, Z^*) \in \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$, удовлетворяющая требованиям 1^0 и 2^0 определения 2.1, называется [1, p. 175] *седловой точкой по Парето* задачи (2.2). Поэтому построение гарантированного по риску решения (U^*, Φ^*) задачи (1.1), в конечном счете, сводится к нахождению седловой точки по Парето для задачи (2.2).

Замечание 2.3. Используя стратегию U^*, ЛПР обеспечивает себе векторную гарантию Φ^*, именно, при каждой фиксированной начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^n$ и любой неопределенности $Z \in \mathbf{Z}$ компоненты вектора $\Phi(U^*, Z, t_0, x_0)$ не могут стать больше $\Phi^*(t_0, x_0)$ одновременно по всем компонентам.

3. Построение векторной функции риска

Далее для симметричной матрицы $D < 0$ (≤ 0) означает, что квадратичная форма $u'Du$ определенно отрицательна (неположительна).

Утверждение 3.1. Если в задаче (1.1)

$$D_i < 0, \ C_i^{(1)} \leq 0, \ G_i - M_i' D_i^{-1} M_i \leq 0 \ (i \in \mathbf{N}), \tag{3.1}$$

то векторная функция риска $\Phi(U, Z, t_0, x_0) = (\Phi_1(U, Z, t_0, x_0), \ldots, \Phi_N(U, Z, t_0, x_0))$ имеет вид

$$\begin{gathered}\Phi_i(U, Z, t_0, x_0) = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{z'[t][\Xi_i(t) D_i^{-1} \Xi_i'(t) - K_i' D_i^{-1} K_i] z[t] + \\ + x'(t)[\theta_i(t) D_i^{-1} \theta_i(t) - M_i' D_i^{-1} M_i] x(t) + 2x'(t)[\theta_i(t) D_i^{-1} \Xi_i'(t) - \\ - M_i' D_i^{-1} K_i] z[t] - u'[t][D_i u[t] + 2K_i z[t] + 2M_i x(t) + 2d_i] + \\ + 2[\xi_i'(t) D_i^{-1} \theta_i(t) - d_i' D_i^{-1} M_i] x(t) + 2[\xi_i'(t) D_i^{-1} \theta_i(t) - d_i' D_i^{-1} K_i] z[t] + \\ + [\xi_i'(t) + d_i'] D_i^{-1} [\xi_i(t) - d_i]\} dt \ (i \in \mathbf{N}),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где матрицы $\theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$ и вектор $\xi_i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{\theta}_i + \theta_i[A - D_i^{-1} M_i] + [A' - M_i' D_i^{-1}]\theta_i - \theta_i D_i^{-1} \theta_i + G_i - \\ - M_i' D_i^{-1} M_i = 0_{n \times n}, \ \theta_i(\vartheta) = C_i^{(1)},\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\dot{\Xi}_i + \Xi_i[A - K_i' D_i^{-1}(\theta_i + M_i)] + B'\Xi_i + N_i - \\ - K_i' D_i^{-1}(\theta_i + M_i) = 0_{m \times n}, \ \Xi_i(\vartheta) = C_i^{(2)},\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\dot{\xi}_i + [A' - (\theta_i + M_i') D_i^{-1}] \xi_i + g_i - (\theta_i + M_i') D_i^{-1} d_i = 0_n, \ \xi_i(\vartheta) = c_i^{(1)}, \tag{3.5}$$

где $0_{n \times k}$– нулевая $n \times k$-матрица, а 0_n– нулевой n-вектор.

Доказательство. Прежде чем перейти к построению функции риска (2.1) найдем

$$\max_{U \in \mathbf{U}} J_i(U, Z, t_0, x_0) \ (i \in \mathbf{N}). \tag{3.6}$$

При этом используем другой вид стратегий, именно, контрстратегии, введенные в [4, гл. XIV] при исследовании минимаксных антагонистических дифференциальных игр. Именно, *контрстратегию* U_z будем отождествлять с функцией $u(t,x,z)$ ($U_z \div u(t,x,z)$) такой, чтобы при $u = u(t,x,z)$ и любой $z = z(t,x)$, $Z \div z(t,x)$, $Z \in \mathbf{Z}$ система (1.2) имела единственное решение $x(t)$, продолжимое на интервал $[t_0, \vartheta]$. Множество контрстратегий U_z обозначим через $\mathbf{U_z}$. Теперь рассмотрим задачу (3.6) при ограничениях (1.2), (1.3) и $U = U_z \in \mathbf{U_z}$, $Z \in \mathbf{Z}$, т.е. задачу

$$\max_{U_z \in \mathbf{U_z}} J_i(U_z, Z, t_0, x_0) = J_i(U_z^{(i)}, Z, t_0, x_0) \; \forall Z \in \mathbf{Z}, \tag{3.7}$$

при ограничениях (1.2), (1.3). Для ее решения применим принцип динамического программирования. Именно, Введем скалярную функцию

$$\begin{aligned} W_i = \tfrac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\tfrac{\partial V_i}{\partial x}\right]'[Ax + u + A_1 z] + \left[\tfrac{\partial V_i}{\partial z}\right]' Bz + u'[D_i u + 2K_i z + 2M_i x] + \\ + z'[L_i z + 2N_i x] + x' G_i x + 2d_i' u + 2l_i' z + 2g_i' x, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где, например, $\frac{\partial V_i}{\partial x}$ означает n–вектор, компоненты которого есть частные производные функции $V_i(t,x,z)$ по координатам n–вектора x.

Имеет место аналогичное [5, p. 240–241] следующее вспомогательное *утверждение:* пусть удалось найти n–вектор-функцию $u^*(t,x,z,V_i)$ и единственную непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V_i(t,x,z)$ такие, что

1^0 при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ справедливо тождество

$$V_i(\vartheta, x, z) = x' C_i^{(1)} x + 2z' C_i^{(2)} x + z' C_i^{(3)} z + 2[c_i^{(1)}]' x + 2[c_i^{(2)}]' z; \tag{3.9}$$

2^0 имеет место

$$W_i(t, x, u^*(t,x,z,V_i), z, V_i) = \max_u W_i(t,x,u,z,V_i) \tag{3.10}$$

для любых $t \in [0, \vartheta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V_i \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^m$;

3^0 для каждых $(t,x,z) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ выполняется

$$W_i(t, x, u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)), z, V_i(t,x,z)) \equiv 0; \tag{3.11}$$

4^0 вектор-функция $u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)) = u^{(i)}(t,x,z)$ такова, что для $U_z^{(i)} \div u^{(i)}(t,x,z)$ выполнено включение $U_z^{(i)} \in \mathbf{U_z}$.

Тогда при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ контрстратегия $U_z^{(i)}$ есть решение задачи (3.7).

С помощью этого утверждения построим явный вид $U_z^{(i)}$. Для этого используем функцию $V_i(t,x,z)$ в виде

$$V_i(t,x,z) = x'\theta_i(t)x + 2z'\Xi_i(t)x + z'\chi_i(t)z + 2\xi_i'(t)x + 2\eta_i'(t)z, \tag{3.12}$$

где соответствующих размерностей матрицы $\theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$ и вектора $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ подлежат определению; предполагаем, что $\theta_i(t)$ и $\chi_i(t)$ симметричны.

Условие (3.10) имеет место, если

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial u}\right)_{u^*(t,x,z,V_i)} = \frac{\partial V_i}{\partial x} + 2D_i u^*(t,x,z,V_i) + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i = 0_n, \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial u^2}\right)_{u^*(t,x,z,V_i)} = 2D_i < 0. \tag{3.14}$$

Требование (3.14) выполняется вследствие $D_i < 0$, а из (3.13)

$$u^*(t,x,z,V_i) = -\frac{1}{2} D_i^{-1} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i\right]. \tag{3.15}$$

Согласно (3.12) будет

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial V_i}{\partial x} &= 2\theta_i x + 2\Xi_i' z + 2\xi_i, \\ \tfrac{\partial V_i}{\partial z} &= 2\Xi_i x + 2\chi_i z + 2\eta_i. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Подставляя (3.15) в (3.11) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned} &W_i(t,x,u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)),z,V_i(t,x,z)) = \tfrac{\partial V_i}{\partial t} + [\tfrac{\partial V_i}{\partial x}]'[Ax + A_1 z] - \\ &-\tfrac{1}{4}[\tfrac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i]' D_i^{-1}[\tfrac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i] + [\tfrac{\partial V_i}{\partial z}]' Bz + \\ &+z'[L_i z + 2N_i x] + x' G_i x + 2l_i' z + 2g_i' x = x'\dot{\theta}_i x + 2z'\dot{\Xi}_i x + z'\dot{\chi}_i z + 2\dot{\xi}_i{}' x + \\ &+2\dot{\eta}_i{}' z + 2[x'\theta_i + z'\Xi_i + \xi_i'][Ax + A_1 z] - [x'(\theta_i + M_i') + \\ &+z'(\Xi_i + K_i') + \xi_i' + d_i'] D_i^{-1}[(\theta_i + M_i)x + (\Xi_i' + K_i)z + \xi_i + d_i] + \\ &+2(x'\Xi_i' + z'\chi_i + \eta_i')Bz + z'L_i z + 2z'N_i x + x'G_i x + 2l_i' z + 2g_i' x = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая здесь и в (3.9) нулю коэффициенты при однотипных слагаемых, получаем, что тождества (3.11) и (3.9) выполнены при всех $(t,x,z) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^{n+m}$, если матрицы $\theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$ и вектора $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i + \theta_i[A - D_i^{-1}M_i] + [A' - M_i' D_i^{-1}]\theta_i - \theta_i D_i^{-1}\theta_i + \\ +G_i - M_i' D_i^{-1} M_i = 0_{n\times n},\ \theta_i(\vartheta) = C_i^{(1)}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\dot{\Xi}_i + \Xi_i A + A_1'\theta_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\theta_i + M_i) + B'\Xi_i + N_i = 0_{m\times n},\ \Xi_i(\vartheta) = C_i^{(2)}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i + \Xi_i A_1 + A_1'\Xi_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\Xi_i' + K_i) + \chi_i B + \\ +B'\chi_i + L_i = 0_{m\times m}\ \chi_i(\vartheta) = C_i^{(3)}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\dot{\xi}_i - (\theta_i + M_i')D_i^{-1}(\xi_i + d_i) + A'\xi_i + g_i = 0_n,\ \xi_i(\vartheta) = c_i^{(1)}, \tag{3.20}$$

$$\dot{\eta}_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\xi_i + d_i) + B'\eta_i + A_1'\xi_i + l_i = 0_m,\ \eta_i(\vartheta) = c_i^{(2)}. \tag{3.21}$$

Согласно (3.1) и [8, б. 208] матричное дифференциальное уравнение типа Риккати (3.17) имеет единственное непрерывное, продолжимое на $[0,\vartheta]$ решение $\theta_i(t)$. Подставляя $\theta_i = \theta_i(t)$ в (3.18), получаем матричное дифференциальное неоднородное уравнение с непрерывными (по t) коэффициентами. Такая система имеет [6, с. 29] непрерывное решение $\Xi_i(t)$, продолжимое на $[0,\vartheta]$. Затем положим $\Xi_i = \Xi_i(t)$, $\theta_i = \theta_i(t)$, где $\Xi_i(t)$, $\theta_i(t)$– указанные выше решения (3.17), (3.18), в системах (3.19) и (3.20). По аналогичной причине существует единственное, непрерывное решение $\chi_i(t)$, $\xi_i(t)$, продолжимое на $[0,\vartheta]$. Наконец, если в (3.21) будет $\Xi_i = \Xi_i(t)$, $\xi_i = \xi_i(t)$ (указанные выше), то и (3.21) также имеет единственное непрерывное, продолжимое на $[0,\vartheta]$ решение $\eta_i(t)$. Следовательно, при выполнении ограничений (3.1) система (3.17)–(3.21) допускает единственное, непрерывное решение $(\theta_i(t),\Xi_i(t),\chi_i(t),\xi_i(t),\eta_i(t))$, продолжимое на $[0,\vartheta]$. Используя это решение, из (3.15), (3.16) получаем, что

$$\begin{aligned} u^{(i)}(t,x,z) = u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)) = -D_i^{-1}[(\theta_i(t) + M_i)x + \\ +(\Xi_i'(t) + K_i)z + \xi_i'(t) + d_i]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Наконец, так как система (1.2) при $u = u^{(i)}(t,x,z)$ и $z = z(t,x)$, $Z \div z(t,x)$, $Z \in \mathbf{Z}$, имеет продолжимое на $[t_0,\vartheta]$ решение $x(t)$, то найденная в (3.22) контрстратегия $U_z^{(i)} \div u^{(i)}(t,x,z)$ является решением задачи (3.7) при любых начальных позициях $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ (согласно приведенному выше вспомогательному утверждению). Наконец, подставляя $u = u^{(i)}(t,x,z)$ из (3.22) в (2.1) и (1.4), получаем явный вид (3.2) функции риска $\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)$, где $\theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$ и $\xi_i(t)$ определяются из (3.3)–(3.5) (которые совпадают с (3.17), (3.18) и (3.20)).

Замечание 3.1. С учетом утверждения 3.1, чтобы построить i-ую компоненту $\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)$ векторной функции риска $\Phi(U,Z,t_0,x_0)$ следует

a) из (3.3) найти $\theta_i(t)$ и, подставив $\theta_i(t)$ в (3.4), (3.5), построить $\Xi_i(t)$, $\xi_i(t)$;

b) используя найденные $\theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$ и $\xi_i(t)$, выписать $\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)$ в явном виде (3.2).

4. Построение гарантированного по риску решения

Будем далее предполагать, что для задачи (1.1) имеет место

Условие 4.1. При всех $i \in \mathbf{N}$

$$D_i < 0,\ C_i^{(1)} \le 0,\ G_i - M_i' D_i^{-1} M_i \le 0, \tag{4.1}$$

т.е. выполнено (3.1).

Тогда, согласно утверждению 3.1, векторная функция риска $\Phi(U, Z, t_0, x_0)$ существует и ее i-тая компонента определяется функционалом (3.2).

Введем множество

$$\mathbf{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \mid \alpha_i = const > 0 \ (i \in \mathbf{N})\}. \tag{4.2}$$

Для вектора $\alpha \in \mathbf{A}$ введем обозначения

$$\begin{array}{l} L_\alpha(t) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i[\Xi_i(t) D_i^{-1} \Xi_i'(t) - K_i' D_i^{-1} K_i], \\ G_\alpha(t) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i[\theta_i(t) D_i^{-1} \theta_i(t) - M_i' D_i^{-1} M_i], \\ N_\alpha(t) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i[\theta_i(t) D_i^{-1} \Xi_i'(t) - M_i' D_i^{-1} K_i], \\ D_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i D_i, \\ K_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i K_i, \\ M_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i M_i, \\ d_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i d_i, \\ g_\alpha'(t) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i[\xi_i'(t) D_i^{-1} \theta_i(t) - d_i' D_i^{-1} M_i], \\ l_\alpha'(t) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i[\xi_i'(t) D_i^{-1} \theta_i(t) - d_i' D_i^{-1} K_i], \\ a_\alpha(t) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i[\xi_i'(t) + d_i'] D_i^{-1} [\xi_i(t) - d_i]. \end{array} \tag{4.3}$$

Тогда функционал

$$\begin{array}{l} \Phi_\alpha(U, Z, t_0, x_0) = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i \Phi_i(U, Z, t_0, x_0) = \\ = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{z'[t] L_\alpha(t) z[t] + x'(t) G_\alpha(t) x(t) + 2x'(t) N_\alpha(t) z[t] - \\ - u'[t] D_\alpha u[t] - 2u'[t] K_\alpha z[t] - 2u'[t] M_\alpha x(t) - 2d_\alpha' u[t] + \\ + 2g_\alpha'(t) x(t) + 2l_\alpha'(t) z[t] + a_\alpha(t)\} dt. \end{array} \tag{4.4}$$

В [1, с. 222] установлена справедливость следующего

Утверждение 4.1. Если существует N–вектор $\alpha \in \mathbf{A}$ и пара $(U^*, Z^*) \in \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$ такие, что

$$\max_{Z\in\mathbf{Z}} \Phi_\alpha(U^*, Z, t_0, x_0) = \Phi_\alpha(U^*, Z^*, t_0, x_0) = \min_{U\in\mathbf{U}} \Phi_\alpha(U, Z^*, t_0, x_0), \tag{4.5}$$

то (U^*, Z^*) является седловой точкой по Парето задачи (1.1) с начальной позицией (t_0, x_0) и поэтому $(U^*, \Phi(U^*, Z^*, t_0, x_0))$ (где $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$, $\Phi_i = \Phi_i(U^*, Z^*, t_0, x_0)$ $(i \in \mathbf{N})$) будет гарантированным по риску решением этой задачи.

Лемма 4.1. Пусть для задачи (1.1) выполнены условия (4.1), кроме того, $m = n$ и хотя бы для одного индекса $j \in \mathbf{N}$

$$K_j = 0_{n\times m},\ det\Xi_j(t) \ne 0 \ \forall t \in [0, \vartheta]. \tag{4.6}$$

Тогда существует набор чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{A}$ таких, что $L_\alpha(t) < 0$ при всех $t \in [0, \vartheta]$.

Доказательство. Из утверждения 3.1 следует, что существуют и определены все $m\times n$–матрицы $\Xi_i(t)$, $t\in[0,\vartheta]$. Согласно ограничениям (4.6),

$$\alpha_j[\Xi_j(t)D_j^{-1}\Xi_j'(t)-K_j'D_j^{-1}K_j]=\alpha_j\Xi_j(t)D_j^{-1}\Xi_j'(t),$$

и, вследствие невырожденности матрицы $\Xi_j(t)$, справедлива цепочка импликаций

$$D_j<0\Rightarrow D_j^{-1}<0\Rightarrow\Xi_j(t)D_j^{-1}\Xi_j'(t)<0\Rightarrow\alpha_j\Xi_j(t)D_j^{-1}\Xi_j'(t)<0$$

при всех $t\in[0,\vartheta]$. Элементы матрицы $\Xi_j(t)$ ($i\in\mathbf{N}$) непрерывны по t (как решения матричных дифференциальных неоднородных уравнений (3.4) с непрерывными коэффициентами) и поэтому ограничены. Теперь положим

$$\alpha_j^*=1-\varepsilon,\ \alpha_k^*=\frac{\varepsilon}{N-1}\ (k=1,\dots,j-1,j+1,\dots,N).$$

Тогда, *во–первых*, $\alpha^*=(\alpha_1^*,\dots,\alpha_j^*,\dots,\alpha_N^*)\in\mathbf{A}$ (множество $\mathbf{A}$ определено в (4.2)), *во–вторых*,

$$\begin{aligned}L_{\alpha^*}(t)=(1-\varepsilon)\Xi_j(t)D_j^{-1}\Xi_j'(t)+\\+\tfrac{\varepsilon}{N-1}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}[\Xi_k(t)D_k^{-1}\Xi_k'(t)-K_k'D_k^{-1}K_k]<0\end{aligned}$$

при достаточно малой постоянной $\varepsilon\in(0,1)$ (знак квадратичной формы не изменится, если к ней добавить квадратичную форму с достаточно малыми коэффициентами).

Лемма 4.2. Пусть в задаче (1.1) матрицы

$$D_i<0,\ C_i^{(1)}=G_i=M_i=0_{n\times n}\ (i\in\mathbf{N}).\tag{4.7}$$

Тогда $D_\alpha<0$ и функционал (4.4) примет вид

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(U,Z,t_0,x_0)=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\{z'[t]L_\alpha(t)z[t]-u'[t]D_\alpha u[t]-2u'[t]K_\alpha z[t]-\\-2d_\alpha'u[t]+2\bar{l}_\alpha'z[t]+a_\alpha(t)\}dt,\end{aligned}\tag{4.8}$$

где $L_\alpha(t)$, D_α, K_α, d_α, $a_\alpha(t)$ те же, что и в (4.4), а

$$\bar{l}_\alpha=-\sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_iK_i'D_i^{-1}d_i.\tag{4.9}$$

Действительно, из $C_i^{(1)}=G_i=M_i=0_{n\times n}$ ($i\in\mathbf{N}$) получаем, что (3.3) имеет единственное и причем нулевое решение $\theta_i(t)=0_{n\times n}$, $t\in[0,\vartheta]$ ($i\in\mathbf{N}$). Отсюда и из (4.3) при $M_i=0_{n\times n}$ ($i\in\mathbf{N}$) следует, что

$$M_\alpha=0_{n\times n},\ G_\alpha(t)=0_{n\times n},\ N_\alpha(t)=0_{m\times n},\ g_\alpha(t)=0_n\ \forall t\in[0,\vartheta],$$

а $l_\alpha(t)$ примет вид (4.9). Подставив их в (4.4), приходим к справедливости (4.8). Заметим, что, согласно утверждению 3.1, при выполнении (4.7) продолжимое на $[0,\vartheta]$ решение системы (3.17)–(3.21) существует. Наконец, справедлива импликация

$$D_i<0\ (i\in\mathbf{N})\Rightarrow D_\alpha=\sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_iD_i<0\ \forall\alpha\in\mathbf{A}.$$

Далее предполагаем выполненным

Условие 4.2. Существуют положительные постоянные α_i ($i\in\mathbf{N}$) такие, что при $t\in[0,\vartheta]$

$$L_\alpha(t)<0,\ K_\alpha=0_{n\times m}.\tag{4.10}$$

Требование $L_\alpha(t)<0$ можно обеспечить, например, воспользовавшись леммой 4.1, второе условие $K_\alpha=0_{n\times m}$ в предположениях леммы 4.1 выполняется при $\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{N}K_k=0_{n\times m}$.

Далее предполагаем, что в задаче (1.1) имеют место ограничения (4.7) и (4.10). Прежде чем перейти к построению седловой точки по Парето, преобразуем функционал (4.8), воспользовавшись (1.3). Из (1.3) получаем [7, с. 100]

$$z[t] = e^{B(t-t_0)} z_0, \tag{4.11}$$

где z_0– любой вектор из $\mathbf{R}^m$. Заметим, что

$$z'[t] = z_0' e^{B'(t-t_0)}. \tag{4.12}$$

С учетом (4.11) и (4.12), функционал (4.8) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(U, Z, t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\vartheta} \{-u'[t] D_\alpha u[t] - 2d_\alpha' u[t]\} dt + z_0' L z_0 + \\ +2l' z_0 + a = \bar{\Phi}_\alpha(U, z_0, t_0, x_0), \end{aligned} \tag{4.13}$$

где

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_0}^{\vartheta} e^{B'(t-t_0)} L_\alpha(t) e^{B(t-t_0)} dt, \\ l &= -\sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i K_i' D_i^{-1} d_i (\vartheta - t_0), \\ a &= \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i [\xi_i'(t) + d_i'] D_i^{-1} [\xi_i(t) - d_i] dt; \end{aligned} \tag{4.14}$$

заметим, что матрица L симметрична и, если $L_\alpha(t) < 0$, то $L < 0$.

Тогда задача (4.5) сводится к нахождению седловой точки $(U^*, z_0^*) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}^m$, т.е. к решению двух задач: для любых начальных позиций $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$

$$\bar{\Phi}_\alpha(U^*, z_0^*, t_0, x_0) = \max_{z_0\in\mathbb{R}^m} \bar{\Phi}_\alpha(U^*, z_0, t_0, x_0), \tag{4.15}$$

и

$$\bar{\Phi}_\alpha(U^*, z_0^*, t_0, x_0) = \min_{U\in\mathbf{U}} \bar{\Phi}_\alpha(U, z_0^*, t_0, x_0) \tag{4.16}$$

при ограничениях (1.2), $U \in \mathbf{U}$ и $z_0 \in \mathbb{R}^m$.

Утверждение 4.2. Пусть в задаче (1.1)

1^0 $m = n$, $D_i < 0$, $C_i^{(1)} = G_i = M_i = 0_{n\times n}$ $(i \in \mathbf{N})$; (4.17)

2^0 существуют положительные постоянные $\alpha_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$ такие, что

$$\begin{aligned} L_\alpha(t) &= \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i [\Xi_i(t) D_i^{-1} \Xi_i'(t) - K_i' D_i^{-1} K_i] < 0 \forall t \in [0, \vartheta]; \\ K_\alpha &= \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i K_i = 0_{n\times m}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Тогда седловая точка по Парето $(U^*, Z^*) \in \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$ для задачи (1.1) существует и имеет вид

$$U^* \div -D_\alpha^{-1} d_\alpha, \; Z^* \div -e^{B(t-t_0)} L^{-1} l, \tag{4.19}$$

где $D_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i D_i$, $d_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i d_i$, постоянные матрица L и вектор l определены в (4.14), (4.18).

Доказательство. Согласно утверждению 4.1, построение седловой точки по Парето для задачи (1.1) сводится, в конечном счете, к нахождению пары $(U^*, z_0^*) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}^n$ из равенств (4.15), (4.16). Вследствие специального вида функционала (4.13) эти задачи разделяются на две независимые задачи

$$\max_{z_0\in\mathbb{R}^n} [z_0' L z_0 + 2l' z_0] = (z_0^*)' L z_0^* + 2l' z_0^*, \tag{4.20}$$

и

$$a + \int_{t_0}^{\vartheta} (-u'[t] D_\alpha u[t] - 2d_\alpha' u[t]) dt - \min_U \tag{4.21}$$

при ограничениях $U \in \mathbf{U}$,

$$\dot{x} = Ax + u + A_1 e^{B(t-t_0)} z_0^*,\ x(t_0) = x_0,$$

и любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$.

Вследствие $L < 0$ решение (4.20) имеет вид

$$z_0^* = -L^{-1} l$$

и тогда

$$Z^* \div -e^{B(t-t_0)} L^{-1} l.$$

Решение задачи (4.21) проведем методом динамического программирования. Именно, составим функцию

$$W(t, x, u, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' [Ax + u - A_1 e^{B(t-t_0)} L^{-1} l] - u' D_\alpha u - 2 d_\alpha' u. \tag{4.22}$$

Вследствие $D_\alpha < 0$ будет $-D_\alpha > 0$ и тогда достаточные условия сводятся к существованию $u(t, x, V)$ и непрерывно дифференцируемой скалярной функции $V(t, x)$ таких, что при любых $(t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)_{u(t,x,V)} = \frac{\partial V}{\partial x} - 2 D_\alpha u(t, x, V) - 2 d_\alpha = 0_n,$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\right)_{u(t,x,V)} = -2 D_\alpha > 0, \tag{4.23}$$

$$W(t, x, u(t, x, V(t, x)), V(t, x)) = 0 \tag{4.24}$$

и при всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$V(\vartheta, x) = a. \tag{4.25}$$

Из равенства (4.23) находим

$$u(t, x, V) = \frac{1}{2} D_\alpha^{-1} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - 2 d_\alpha\right]. \tag{4.26}$$

Подставляя (4.26) в (4.24) и (4.22), получаем, с учетом (4.25),

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' [Ax - A_1 e^{B(t-t_0)} L^{-1} l] + \\ + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - 2 d_\alpha\right] D_\alpha^{-1} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - 2 d_\alpha\right] = 0, V(\vartheta, x) = a. \end{gathered} \tag{4.27}$$

Решение (4.27) ищем в виде

$$V(t, x) = x' \theta(t) x + 2 \xi'(t) x + \eta(t), \tag{4.28}$$

где симметричная $n \times n$–матрица $\theta(t)$, n–вектор $\xi(t)$ и скалярная функция $\eta(t)$ подлежат нахождению. Подставляя (4.28) в (4.27), получаем, что (4.27) имеет место, если $\theta(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} + \theta A + A' \theta + \theta D_\alpha^{-1} \theta = 0_{n \times n},\ \theta(\vartheta) = 0_{n \times n}, \\ &\dot{\xi} + A \xi - \theta A_1 e^{B'(t-t_0)} L^{-1} l = 0_n,\ \xi(\vartheta) = 0_n, \\ &\dot{\eta} - 2 \xi' A_1 e^{B(t-t_0)} L^{-1} l + d_\alpha' D_\alpha^{-1} d_\alpha = 0,\ \eta(\vartheta) = a. \end{aligned}$$

Очевидное решение первых двух: $\theta = 0_{n \times n}$, $\xi = 0_n$, $t \in [0, \vartheta]$, а последнего, с учетом $\xi = 0_n$, будет

$$\eta(t) = -d_\alpha' D_\alpha^{-1} d_\alpha (\vartheta - t) + a.$$

Подставляя найденные $\theta = 0_{n\times n}$, $\xi = 0_n$ в (4.28), (4.26), получаем $U^* \div -D_\alpha^{-1} d_\alpha$.

5. Список литературы

[1] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The Vector–Valued Maximin. N.Y. etc.: Academec Press, 1994.
[2] Wald A. Contributions to the theory of statistical estimation and testing hipothestesis // Annuals Math. Statist. 1939. V 10. P. 299–326.
[3] Savege L.Y. The theory of statistical decusion // J. American Statistic Association. 1951. N 46. P. 55–67.
[4] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. Наука, 1974.
[5] Zhukovskiy V.I. Lyapunov Function in Differential Games. London, N.Y.: Taylor and Francis, 2003.
[6] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИФМЛ, 1961.
[7] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1954.
[8] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

Жуковский В.И., профессор, заведующий кафедрой математики и механики, Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, г. Москва, 123298, Россия

Житенева Ю.Н., доцент кафедры информатики,Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, г. Москва, 123298, Россия

E-mail: `rzitlp_oz@t50.ru`

О РЕАЛИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПЛОСКИМИ СХЕМАМИ.

Н. А. Шкаликова,
СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова

Рассматриваются схемы из функциональных элементов, расположенных на плоскости. В определении сожности учитываются площади функциональных элементов, узлов и каналов связи. Входы и выходы схем расположены на границе прямоугольника, в котором расположена схема. Сложностью схемы называется площадь такого прямоугольника.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ некоторое множество булевых функций (или систем булевых функций).

Множество K наборов из нулей и единиц будем называть кодом множества $\mathfrak{M}$, если между элементами множества K и $\mathfrak{M}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Плоскую схему $S(K, \mathfrak{M})$ будем называть универсальной для множества $\mathfrak{M}$ с кодом K, если

(1) множество входов схемы можно разбить на два подмножества: основных и управляющих;
(2) при подаче на управляющие входы набора, соответствующего элементу F, $F \in \mathfrak{M}$, схема будет реализовывать функцию (или систему функций) F от переменных, поданных на основные входы.

Введём следующие обозначения.

- $L(S(K, \mathfrak{M}))$ — сложность схемы $S(K, \mathfrak{M})$;
- $L(K, \mathfrak{M}) = \min L(S(K, \mathfrak{M}))$, где минимум берётся по всем универсальным схемам для множества $\mathfrak{M}$ с кодом K;
- $L(\mathfrak{M}) = \min L(K, \mathfrak{M})$, где минимум берётся по всем кодам множества $\mathfrak{M}$;
- $R(n)$ — множество всех перестановок $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ набора переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- $B(n)$ — множество булевых функций от n переменных;
- $D(n)$ — множество булевых функций, реализуемых схемами из функциональных элементов со сложностью, не превышающей n.

Теорема 1.

$$L(R(n)) \asymp n^2 \log_2 n.$$

Теорема 2.

$$L(B(n)) \asymp n2^n.$$

Теорема 3.

$$L(D(n)) \asymp n^2 \log_2 n.$$

Н. А. Шкаликова, Специализированный учебно-научный центр Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова

E-mail: `shkalikova@yahoo.com`

R-OPTIMAL SUBGAMES IN NON-COOPERATIVE GAME OF THREE PERSON

Alexandr E. Bardin
Institute of Textile and Light Industries
Moskow, Russia

The notion of R-optimal subgame of the non-cooperative three-person game under uncertainty is formalized. It is based on the concept of Nash equilibrium (from the game theory), the concept of minimax regret (devised by Savage [6]) and notion of minimal element of the partially ordered set. The properties of new notion are investigated.

Consider a three-person non-cooperative game under uncertainty

$$\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{1}$$

where $\mathbf{N} = \{1, 2, 3\}$ is a set of players' numbers. The game (1) passes in next manner. Each player i following by somehow rules picks the strategy $x_i \in X_i \in comp\mathbf{R}^{n_i}$. The collection of strategies $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod_{i \in \mathbf{N}} X_i$ is called the set of situations of the game Γ. The uncertainties are $y \in Y \in comp\mathbf{R}^m$, the payoff of player i is given by the function $f_i(x, y)$ is continuous over $X \times Y$. The player i employs a strategy $x_i \in X_i$ such that payoff function $f_i(x, y)$ will be the largest possible.

At the set $X \times Y$ we determine the functions [4]

$$\Phi_i(x, y) = \max_{z_i \in X_i} f_i(z_i, x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}, y) - f_i(x, y), \qquad i \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

where $x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{\mathbf{N}})$.

Consider an ordered set of subgames with inhibited situation generated by the game Γ and some partial ordering. The order induced by the concept of Nash equilibrium. The notion of optimal subgame is introdused and the properties of such subgames are examined.

The subgame with inhibited situations is called the system

$$\Gamma_M = \langle \mathbf{N}, M, Y, \{f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)\} \rangle, \tag{3}$$

where the set M is nonempty compact subset of the set X, the other elements of the game (3) is described in the game (1).

The players select own strategies such that the three $(x_1, x_2, x_3) \in M$. Let $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_M \mid M \in X, M \neq \emptyset\}$ is the set of all subgames generated by the game Γ. The binary relation R on the set $\mathbf{\Gamma}$ is discribed in next manner.

Let Γ_{M_1} Ë Γ_{M_2} are the subgames such $M_1 \subsetneq M_2$. The first player in the situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in M_1$ has "$\Phi - threat$", if there exists the strategy $x_1^t \in X_1$ thus the situation $(x_1^t, x_2^*, x_3^*) \in M_2 \setminus M_1$ and for each $(x_1, x_2^*, x_3^*) \in M_1$ be realised

$$\max_{y \in Y} \Phi_1(x_1^t, x_2^*, x_3^*, y) < \max_{y \in Y} \Phi_1(x_1, x_2^*, x_3^*, y) \tag{4}$$

By analogy in the situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in M_1$ for second (third) player "$\Phi - threat$" is defined. On the set $\mathbf{\Gamma}$ the binary relation is introdused.

Definition 1. The subgame $\Gamma_{M_1} \in \mathbf{\Gamma}$ is more preferable then $\Gamma_{M_2} \in \mathbf{\Gamma}$ (denote $\Gamma_{M_1}\ R\ \Gamma_{M_2}$), if

1^0. $M_1 \subsetneq M_2$,

2^0. for each situation $(x_1, x_2, x_3) \in M_1$ there is no "$\Phi - threat$" for all players.

If the subgame Γ_{M_1} is not preferable then Γ_{M_2}, we denote $\Gamma_{M_1}\ \bar{R}\ \Gamma_{M_2}$

Lemma 1. Binary relation R is strict order, i.e. the relation R is antisymmetric and transitive. This statement follows from definition 1.

Definition 2. The subgame $\Gamma_{M^*} \in \mathbf{\Gamma}$ is called R - minimal subgame $\mathbf{\Gamma}$ if there is no $\Gamma_M \in \mathbf{\Gamma}$ such that $\Gamma_M \; R \; \Gamma_{M^*}$. R-minimal subgame is called $\mathbf{R-optimal}$ in ordered set $\langle \mathbf{\Gamma}, R \rangle$ if $\Gamma_{M^*} \neq \Gamma \Rightarrow \Gamma_{M^*} \; R \; \Gamma$.

Property 1. The set M^* of the situations of R-optimal subgame Γ_{M^*} cannot contains the three (x_1^*, x_2^*, x_3^*) such that

$$\min_{z_i \in X_i} \max_{y \in Y} \Phi_i(z_i, x^*_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}, y) < \max_{y \in Y} \Phi_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y) \tag{5}$$

for any $i \in \mathbf{N}$. Here $(x^*_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}, y) = (x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, ..., x_{\mathbf{N}}^*)$.

Proof. Let there exists R-optimal subgame Γ_{M^*} and the three $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ such the inequality (5) is correct for any $i \in \mathbf{N}$. Since the functions $\max\limits_{y \in Y} \Phi_i(x, y)$ are continuous on X, there exists an open ball $B(x^*, r) \subset R^{n_1} \times R^{n_2} \times R^{n_3}$ such that for any $x = (x_1, x_2, x_3) \in B(x^*, r)$ it follows

$$\min_{z_i \in X_i} \max_{y \in Y} \Phi_i(z_i, x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}, y) < \max_{y \in Y} \Phi_i(x_1, x_2, x_3, y), \quad i \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Let the set $M_1 = M^* \setminus (B(x^*, r) \cap X)$ and the subgame $\Gamma_{M_1} \in \mathbf{\Gamma}$ such

1^0. $M_1 \subsetneq M^*$,

2^0. for each situation $(x_1, x_2, x_3) \in M_1$ there is no "$\Phi - threat$" for all players.

The second condition it follows from the set M^* contains the three $(x_i, x^*_{\mathbf{N}\setminus\{i\}})$ for any $i \in \mathbf{N}$, where

$$x_i = arg \min_{z_i \in X_i} \max_{y \in Y} \Phi_i(z_i, x^*_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}, y), \quad i \in \mathbf{N}.$$

Then $\Gamma_{M_1} \; R \; \Gamma_{M^*}$ and Γ_{M^*} is R-optimal subgame. This is a contradiction.

Property 2. If Γ_{M^*} is R-optimal game thus $M^* = \{(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\}$ then the situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ is Nash equilibrium in the game Γ_1

$$\Gamma_1 = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{\min_{y \in Y}(-\Phi_i(x_1, x_2, x_3, y))\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{7}$$

and for each equilibrium $x^e = (x_1^e, x_2^e, x_3^*)$ in the game Γ_1 there exists the R-optimal game $\Gamma_{\{x^e\}}$.

Property 2 directly follows from definition 2.

Example

Let in the game Γ the set $Y = \{y_0\}$ is one-element set and $X_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}\}$. The payoff functions are defined:

$$f_1(x^{(k_1)}, y_0) = f_1(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, y_0) = f_1(x^{(k_6)}, y_0) = f_1(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, y_0) = 1,$$

$$f_1(x^{(k_4)}, y_0) = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, y_0) = f_1(x^{(k_2)}, y_0) = f_1(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, y_0) = 1,$$

$$f_2(x^{(k_1)}, y_0) = f_2(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, y_0) = f_2(x^{(k_5)}, y_0) = f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, y_0) = 1,$$

$$f_2(x^{(k_3)}, y_0) = f_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, y_0) = f_2(x^{(k_4)}, y_0) = f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, y_0) = 1,$$

$$f_3(x^{(k_3)}, y_0) = f_3(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, y_0) = f_3(x^{(k_6)}, y_0) = f_3(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, y_0) = 1,$$

$$f_3(x^{(k_5)}, y_0) = f_3(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, y_0) = f_3(x^{(k_2)}, y_0) = f_3(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, y_0) = 1.$$

In all other cases $f_i(x_1, x_2, x_3, y_0) = 0, i \in \mathbf{N}$. In this game there exists nine R-optimal subgames $\Gamma_{\{x^e_{(k)}\}}$, where situation $x^e_{(k)}, k \in \{1, 2, ...9\}$ is Nash equilibrium in the game Γ. Let $M^* = \{x^{(k_i)} : i \in \{1, 2, ..., 6\}\}$. Collection of all situation of R-optimal subgame Γ_{M^*} coincide the all Pareto-maximal solutions [7] in the multicriterial problem

$$\langle X, f(x, y_0) = (f_1(x, y_0), f_2(x, y_0), f_3(x, y_0)) \rangle, \tag{8}$$

where the set X of solutions x is the set of the situations in this game, the components of vector $f(x, y_0)$ are described above.

Property 2 and example show that the concept of "R-optimality"in special cases be the same as the concept of Nash equilibrium.

Property 3. If the set of all situations of R-optimal game $\Gamma_{M^*} \in \mathbf{\Gamma}$ is not one-element set then for each situation $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in M^*$ the strategy one of players (for example, second) is the best for him, i.e.,

$$\min_{z_2 \in X_2} \max_{y \in Y} \Phi_i(z_2, x^*_{\mathbf{N}\setminus\{2\}}, y) = \max_{y \in Y} \Phi_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y).$$

At least, one player (for example, third) has the threat $x_3^t \in X_3$ in the situation (x_1^*, x_2^*, x_3^*) thus there exists the situation $(x_1^*, x_2^*, x_3^t) \in M^*$ realizes the threat of the third player

$$\min_{z_3 \in X_3} \max_{y \in Y} \Phi_i(z_3, x^*_{\mathbf{N}\setminus\{3\}}, y) = \max_{y \in Y} \Phi_i(x_1^*, x_2^*, x_3^t, y).$$

In the situation $(x_1^*, x_2^*, x_3^t) \in M^*$ the first or second player has the threat.

The proof of analogical property is in the paper [2].

Consider the formalization of compact metrix space of games $\langle \mathbf{T_c}, d_h^\Gamma \rangle$.

Let $\langle \mathbf{M}_c, d \rangle$-a metrix space, where d is Euclidean distance and $\mathbf{M}_c$ is the set of all nonempty compact subsets of the set $X_1 \times X_2 \times X_3$. For any two elements $M_1, M_2 \in \mathbf{M}_c$ we shall define **Hausdorf** distance d_h ÿ $\mathbf{M}_c$

$$d_h(M_1, M_2) = max\{\max_{x \in M_1} d_1(x, M_2), \max_{x \in M_2} d_1(x, M_1)\}, \tag{9}$$

where $d_1(x_0, M) = \min_{x \in M} d(x_0, x)$ for any $x_0 \in X_1 \times X_2 \times X_3$ and the set $M \in \mathbf{M}_c$.

Definition 3. Let $\mathbf{T}_c = \{\Gamma_M \mid M \in compX_1 \times X_2 \times X_3, M \neq \emptyset\}$ is the set of all nonempty compact subgames of the game Γ. The distance in $\mathbf{T}_c$ we shall call the function $d_h^\Gamma : \mathbf{T}_c \times \mathbf{T}_c \to \mathbf{R}$ such that

$$\forall \Gamma_{M_1}, \Gamma_{M_2} (d_h^\Gamma(\Gamma_{M_1}, \Gamma_{M_2}) = d_h(M_1, M_2)),$$

where the distance $d_h(M_1, M_2)$ is called in (9).

Lemma 2. The pair $\langle \mathbf{T_c}, d_h^\Gamma \rangle$ is a compact metrix space.

Proof. The distance in $\mathbf{T}_c$ is the distance between the compact sets of the situation of these games. It is well known that the set of all nonempty compact subsets of compact set and Hausdorf distance form the compact metrix space.

Further we shall proof the continuity of the order R (definition 1) relative to the topology of metrix space $\langle \mathbf{T_c}, d_h^\Gamma \rangle$.

The game $\Gamma_{M^*} \in \mathbf{T_c}$ is lower (upper) bound of the set $\mathbf{Q} \subset \mathbf{T_c}$ if for any element $\Gamma_M \in \mathbf{Q}$ either $\Gamma_{M^*}\ R\ \Gamma_M$, or $\Gamma_{M^*} = \Gamma_M$ ($\Gamma_M\ R\ \Gamma_{M^*}$ or $\Gamma_{M^*} = \Gamma_M$). The order relation be continuous relative to the topology of metrix space $\langle \mathbf{T_c}, d_h^\Gamma \rangle$ if any lower (upper) bound of any set $\mathbf{Q} \subset \mathbf{T_c}$ is lower (upper) bound of the closure.

Lemma 3. The order R is continuous relative to the topology of metrix space $\langle \mathbf{T_c}, d_h^\Gamma \rangle$.

Lemma 3 is proved by analogy with method in [1].

Theorem 1. Let in the game Γ

1^0 the sets $X_i \in comp\mathbf{R}^{n_i}, i \in \{1, 2, 3\}$,

2^0 the function $f_i(x_1, x_2, x_3, y)$ are continuous on $X_1 \times X_2 \times X_3 \times Y$.

Then there exists the game Γ_{M^*}, which be R-optimal game of the ordered set $\langle \mathbf{\Gamma}, R \rangle$, thus $M^* \in compX_1 \times X_2 \times X_3 \times Y$.

Proof. The conclusion of a theorem follows from lemma 3 and next statement: if T is compact metric space and relation $<$ is strict continuous order then for each element $t \in T$ there exists minimal element $t_0 \in T$ such that $t_0 < t$ or $t_0 = t$.

Remark .

The formalization of the notion of R-optimal subgame for non-cooperative two-person game under uncertainty is realized in papers [1]-[3]. In the same place the properties and structure of R-optimal subgames are investigated.

References

1. A.E.Bardin, *About cooperative solution of Non-Cooperative game*, in the book V.I. Zhukovskiy,*Cooperative Games under Uncertainty and Applications,* International Research Institute for Management Sciences, Moscow, 1999, 317-323. (Russian).

2. A.E.Bardin, *Structure of Set R-optimal Subgames of Constrained Game under Uncertainty*, Complex Control Systems, Institute of Textile and Light Industries, Moscow, 1999, 5-9.(Russian).

3. A.E.Bardin, *R-optimality in One Non-Cooperative Three-Person Game* Izv. Ins. Mat. Inf., Udmurt State University, Izhevsk, 2000, 3-10. (Russian).

4. Alexandr E. Bardin, *Regret Concept in Non-Cooperative Game*, Intern. J. of Math., Game Th., Algebra, Vol.7, No. 2\3, Nova Science Publishers, N.Y., 1998, 75-79.

5. M. Salukvadze and A.E.Bardin, *Vector-Valued Risk in Multicriteria Problems*, Advances in multiple objective and goal programming (Torremolinos, 1996), 235-244, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, 455, Springer, Berlin, 1997.

6. L.J. Savage, *The Theory of Statistic Decision*, J. American Statistic Association, No.46 (1951), 55-67.

7. V.I. Zhukovskiy, M.E. Salukvadze, *The Vector-Valued Maximin*, N.Y. Academic Press, 1994.

E-mail: `rzitlp_oz@t50.ru`

Содержание

Сборник научных трудов

Информационно-издательский отдел
Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
95007, Симферополь, пр-т. Вернадского, 4

Подписано к печати Формат 60×84/8 Бумага тип.
Объем 15 печ. л. Тираж 300 экз. Заказ